## ВВЕДЕНИЕ

К сингулярно возмущенным относятся уравнения с малым параметром при старших производных. Для приближенного решения сингулярно возмущенных задач на ЭВМ представляется целесообразным строить численные методы, сходящиеся равномерно по параметру.

В настоящей работе рассматриваются сингулярно возмущенные уравнения второго порядка.

Остановимся сначала на классических численных методах. В классической теории разностные схемы разрабатываются и исследуются в предположении достаточной гладкости решения. Стандартный подход к исследованию схем состоит в следующем: изучается погрешность аппроксимации, в ней фигурируют производные решения, которые предполагаются ограниченными, поэтому погрешность аппроксимации мала при малом шаге сетки. Исходя из этого при наличии априорной оценки устанавливается сходимость схемы.

При наличии малого параметра при старших производных возникают пограничные слои с быстро меняющимся решением. Производные решения не являются ограниченными равномерно по параметру. Поэтому использование для сингулярно возмущенных задач классических численных методов, разработанных для задач с гладкими решениями, не позволяет, вообще говоря, получать приближенные решения сходящиеся равномерно относительно параметра.

Таким образом, возникает проблема разработки специальных численных методов для сингулярно возмущенных задач. В области разработки таких методов сложились два подхода:

- основанный на методах подгонки;
- использующий специальным образом сгущающиеся сетки.

Метод подгонки был предложен Д.Алленом и Р.Саусвеллом (1955) и А.М.Ильиным ([3],1969). Их подход состоял в рассмотрении дифференциального уравнения на достаточно малых подынтервалах так,чтобы коэффициенты можно было считать локально постоянными. На каждом таком подынтервале коэффициенты разностного уравнения строились (подгонялись) таким образом, чтобы точные решения экспотенциального типа (а именно они и описывают пограничный слой) дифференциального уравнения с "замороженными" коэффициентами являлись решениями разностного уравнения. А.М.Ильин впервые показал что схема подгонки на равномерной сетке сходится с первым порядком по шагу сетки равномерно относительно параметра.

Работа А.М.Ильина положила начало исследованию методов подгонки, которые во многих случаях являются равномерно по параметру сходящимися. Подобные результаты изложены,например, в [2].

Однако эти методы не являются универсальными. В работе Г.И.Шишкина [7] приведен пример квазилинейного обыкновенного дифференциального уравнения, вырождающегося в уравнение первого порядка, для которого на равномерной сетке не существует равномерно по параметру сходящейся схемы подгонки.

Заметим, что в методах подгонки на распределение узлов сетки ограничений(вызванных наличием малого параметра) не накладывается, а для обеспечения сходимости подгоняются коэффициенты разностных уравнений.

Принципиально иным является метод сгущающихся сеток. Здесь для построения разностной схемы используются классические аппроксимации, но на специальным образом сгущающихся сетках. Именно специальный выбор сетки обеспечивает сходимость такой схемы.

Метод сгущающихся сеток был впервые предложен в работе Н.С.Бахвалова [1] (1969), в которой для двух модельных краевых задач ( система обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнение эллиптического типа) были построены методы решения, сходящиеся равномерно по малому параметру. Рассматривались задачи, вырождающиеся в уравнения нулевого порядка. Получив, что модуль разности точного и приближенного решений оценивается через погрешность аппроксимации краевой задачи разностной схемой Н.С.Бахвалов предложил минимизировать погрешность аппроксимации за счет выбора узлов сетки по следующему правилу : погрешность аппроксимации должна быть примерно одинакова во всех узлах сетки и равномерна по параметру.

В случае краевых задач, вырождающихся в уравнения первого порядка, ситуация сложнее: члены дифференциальных уравнений не являются ограниченными по параметру. В этом случае справедлива следующая теорема ([8], с.116):

Теорема. Для класса разностных схем, сеточные уравнения которых построены классической аппроксимацией дифференциальных уравнений, не существует сеток, на которых разностная схема аппроксимирует дифференциальное уравнение равномерно относительно параметра.

Т.е. в этом случае просто невозможно построить сетку так, чтобы погрешность аппроксимации была равномерно по параметру мала во всех узлах.

Заметим, что из этой теоремы не следует, что не существует схем метода сгущающихся сеток, сходящихся равномерно по параметру.

Применимость классических разностных аппроксимаций на сгущающихся в пограничном слое сетках для построения равномерно по параметру сходящихся схем исследуется в работах Г.И.Шишкина (см.,например, [7],[8],). Предлагается использовать сгущающуюся в пограничном слое кусочно-равномерную сетку. На отрезке [0,1] это сетка с шагом $h$ на интервале длины $\sigma$ в окрестности пограничного слоя и шагом $H$ на оставшейся части единичного отрезка.

Г.И.Шишкин обосновал следующие необходимые условия равномерной сходимости разностных схем, построенных классической аппроксимацией на кусочно-равномерной сетке ([8], с.115):

Лемма 1. Пусть не выполняется условие:

$$\frac{h}{\varepsilon} \to 0, \qquad N \to \infty$$

равномерно по параметру.

Тогда схема не сходится равномерно по параметру.

Лемма 2. При $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ схема не сходится равномерно по параметру при любых значениях $h$ и $H$. Для равномерной по параметру сходимости схемы необходимо, чтобы $\sigma$ зависело и от $\varepsilon$ и от $N$:

$$\sigma = \sigma\ (\varepsilon, N).$$

Предлагается выбирать

$$\sigma = \min \{ \varepsilon c \ln N, d \},$$

где $c$, $d$ - некоторые постоянные.

В случае задач, вырождающихся в уравнения первого порядка, Г.И.Шишкин показал, что схемы на таких кусочно-равномерных сетках сходятся с порядком $\frac{\ln^2 N}{N}$ Это более высокий порядок сходимости ппо сравнению с результатами Г.И.Шишкина для задач такого типа.

В разделах 1-3 для простейшего однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами рассматривается схема с центральной разностной производной на кусочно-равномерной сетке. Решение соответствующей разностной задачи построено в явном виде, асимптотическое исследование которого показывает равномерную по параметру сходимость схемы.

В разделе 4 рассматривается сингулярно возмущенная задача, решение которой есть гладкая функция. Заметим, что решение не содержит негладкую составляющую, если определенным образом согласованы правая часть уравнения и краевые условия. Показано, что схема с центральной разностью на равномерной сетке, вообще говоря, не сходится при достаточно малых значениях параметра. Заметим, что сходимость отсутствует несмотря на гладкость решения, которая обеспечивает равномерную по параметру аппроксимацию дифференциальной задачи. Отсутствие сходимости здесь объясняется сингулярной возмущенностью разностного оператора.

В разделе 5 для сингулярно возмущенной краевой задачи с переменными коэффициентами показана равномерная по параметру сходимость схемы с центральной разностной производной на кусочно-равномерной сетке. Для доказательства этого факта построена функция Грина разностной задачи и показана ее равномерная по параметру ограниченность.

Все эти выводы подтверждаются результатами численных расчетов, которые приведены в разделе 6.