5. УРАВНЕНИЕ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

5.1. СХЕМА С ЦЕНТРАЛЬНОЙ РАЗНОСТЬЮ НА КУСОЧНО-РАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ

Рассмотрим на отрезке [0,1] задачу

$$\varepsilon\left(p(x)\cdot u'\right)' + r(x)\cdot u' = -f(x), \quad 0<x<1, \qquad (62)$$

$$u(0) = u_0, \qquad u(1) = u_1, \qquad (63)$$

$$\varepsilon \in (0, 1]$$

Пусть коэффициенты $p(x)$, $r(x)$ и $f(x)$ достаточно гладкие и удовлетворяют условиям

$$0 < p_{min} \le p(x) \le p_{max},$$

$$0 < r_{min} \le r(x) \le r_{max}. \qquad (64)$$

Введем на отрезке [0,1] кусочно-равномерную сетку $\hat{\omega}$ (13)-(16) и рассмотрим на этой сетке схему с центральной разностью

$$L_h y = \varepsilon\left(P y_{\bar{x}}\right)_{\hat{x}} + R y_{\overset{\circ}{x}} = -F, \quad x \in \hat{\omega}, \qquad (65)$$

$$y_0 = u_0, \qquad y_{2N} = u_1. \qquad (66)$$

Здесь

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \qquad \hbar_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{2},$$

$$y_{\bar{x},i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}, \quad y_{\hat{x},i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\hbar_i}, \quad y_{\overset{\circ}{x},i} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\hbar_i}$$

(см. рис. 5.1),

$$P_i = p\left(x_i - \frac{h_i}{2}\right), \quad R_i = r(x_i), \quad F_i = f(x_i). \qquad (67)$$

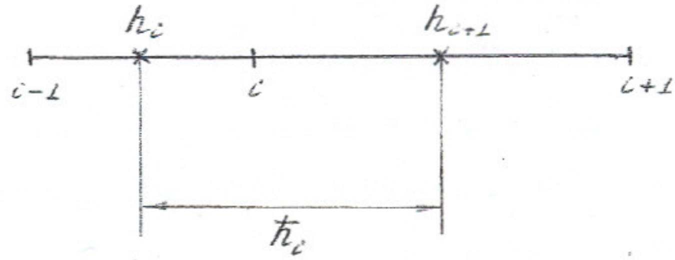

рис. 5.1

Сеточная задача (65),(66) аппроксимирует дифференциальную задачу (62),(63) с первым порядком по шагу сетки в узле N и со вторым порядком по шагу сетки в остальных узлах.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА

Пусть коэффиценты $p(x)$, $r(x)$ и $f(x)$ в задаче (62),(63) достаточно гладкие и удовлетворяют условиям (64) и следующему условию:

существуют такие $\delta>0$ и натуральное M, что для любого $\theta\in[0,\delta]$ на интервале $[\theta,1]$ функция $\dfrac{p(x-\theta)}{r(x)}$ имеет менее M промежутков возрастания-убывания.

Тогда схема (65),(66) на кусочно-равномерной сетке $\hat{\omega}$ (13)-(16) при

$$\sigma = \min\left\{\varepsilon\, c\, \ln N,\ \frac{1}{2}\right\},$$

$$c \geqslant 2\,\frac{r(0)}{p(0)} \qquad (68)$$

сходится с порядком $\left(\frac{\ln N}{N}\right)^2$, т.е. для $u(x)$ - решения (62),(63) и y_i - решения (65),(66) справедливо соотношение:

$$\max_i |y_i - u(x_i)| = O\left(\left(\frac{\ln N}{N}\right)^2\right). \qquad (69)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Известно, что погрешность решения

$$z_i = y_i - u(x_i) \tag{70}$$

удовлетворяет сеточной задаче (65),(66) с правой частью, равной погрешности аппроксимации

$$\psi_i = (L_h u + F)_i = (L_h u - L u)_i , \tag{71}$$

и нулевыми граничными условиями:

$$L_h z = -\psi, \quad x \in \hat{\omega}, \tag{72}$$

$$z_0 = z_{2N} = 0. \tag{73}$$

Следоваельно погрешность решения представима через G_{ik} - сеточную функцию Грина:

$$z_i = (G_{ik}, \psi_k) = \sum_{k=1}^{2N-1} G_{ik} \psi_k \hbar_k. \tag{74}$$

Для доказательства теоремы

1) строится в явном виде функция Грина сеточной задачи и показывается ее равномерная по параметру ограниченность;

2) показывается, что

$$|(1, \psi_k)| = O\left(\left(\frac{\ln N}{N}\right)^2\right).$$

Из этих двух фактов (обоснование которых приводится ниже) вытекает справедливость теоремы.

5.2. ФУНКЦИЯ ГРИНА СЕТОЧНОЙ ЗАДАЧИ

1) Построим в явном виде функцию Грина сеточной задачи, которая по определению удовлетворяет следующим условиям:

$$L_{h(i)} G_{ik} = -\frac{\delta_{ik}}{\hbar_k}, \quad i,k = 1, \dots, 2N-1, \tag{75}$$

$$G_{0k} = G_{2N,k} = 0. \tag{76}$$

Будем искать эту функцию в виде:

$$G_{ik} = \frac{1}{c_k} \begin{cases} \tilde{y}_i \, (\tilde{y}_{2N} - \tilde{y}_k), & i \le k \\ (\tilde{y}_{2N} - \tilde{y}_i)\, \tilde{y}_k, & i \ge k, \end{cases}$$

где $\tilde{y}_i$ - решение разностного уравнения (65) с нулевой правой частью, удовлетворяющее условию $\tilde{y}_0 = 0$:

$$\tilde{y}_i = \sum_{\ell=1}^{i} \frac{h_\ell}{\varepsilon P_\ell} w_\ell, \tag{77}$$

$$w_i = \varepsilon (P \tilde{y}_{\bar{x}})_i = \prod_{j=0}^{i-1} q_j, \tag{78}$$

$$q_i = \frac{1 - \dfrac{R_i}{2\varepsilon} \dfrac{h_i}{P_i}}{1 + \dfrac{R_i}{2\varepsilon} \dfrac{h_{i+1}}{P_{i+1}}}, \tag{79}$$

$$h_0 = 0.$$

Коэффициент c_k определяется из уравнения (75) при i=k. В результате получаем

$$G_{ik} = \frac{1}{w_{k+1} \left(1 + \dfrac{R_k}{2\varepsilon} \dfrac{h_{k+1}}{P_{k+1}}\right) \tilde{y}_{2N}} \begin{cases} \tilde{y}_i \, (\tilde{y}_{2N} - \tilde{y}_k), & i \le k, \\ (\tilde{y}_{2N} - \tilde{y}_i)\, \tilde{y}_k, & i \ge k. \end{cases} \tag{80}$$

2) Оценим функцию $\tilde{y}_i$, $i = 0, \dots, N$.

Введем следующие обозначения:

$$q_{max} = \frac{1 - \dfrac{r_{min}}{2\varepsilon} \dfrac{h}{P_{max}}}{1 + \dfrac{r_{min}}{2\varepsilon} \dfrac{h}{P_{max}}},$$

$$q_{min} = \frac{1 - \frac{r_{max}}{2\varepsilon} \frac{h}{p_{min}}}{1 + \frac{r_{max}}{2\varepsilon} \frac{h}{p_{min}}} . \qquad (81)$$

Заметим, что при достаточно больших N $q_{min} > 0$.

Тогда в силу (77),(78),(79) имеем

$$0 < q_{min} \le q_i \le q_{max} < 1, \quad i = 1, \ldots, N-1, \quad (82)$$

$$0 < \frac{q_{min}^{i-1}}{1 + \frac{r_{max}}{2\varepsilon} \frac{h}{p_{min}}} \le w_i \le \frac{q_{max}^{i-1}}{1 + \frac{r_{min}}{2\varepsilon} \frac{h}{p_{max}}},$$

$$i = 1, \ldots, N, \quad (83)$$

$$\frac{1}{r_{max}} \frac{p_{min}}{p_{max}} \left(1 - q_{min}^{i}\right) \le \tilde{y}_i \le \frac{1}{r_{min}} \frac{p_{max}}{p_{min}} \left(1 - q_{max}^{i}\right),$$

$$i = 0, \ldots, N. \quad (84)$$

Заметим, что в силу (32)

$$q_{max}^{i} = \exp\left\{-i \frac{r_{min}}{p_{max}} \frac{h}{\varepsilon}\right\} \left[1 + i\, O\left(\left(\frac{\ln N}{N}\right)^3\right)\right], \quad (85)$$

$$q_{min}^{i} = \exp\left\{-i \frac{r_{max}}{p_{min}} \frac{h}{\varepsilon}\right\} \left[1 + i\, O\left(\left(\frac{\ln N}{N}\right)^3\right)\right] \quad (86)$$

Заметим также, что согласно (83)

$$w_i = \varepsilon \left(P \tilde{y}_{\bar{x}}\right)_i > 0, \quad i = 1, \ldots, N,$$

поэтому функция $\tilde{y}_i$, i=0,...,N+1 возрастает.

3) Спрведлива следующая

ЛЕММА

Пусть существуют такие $\delta > 0$ и M, что при любом $\theta \in [0, \delta]$ на интервале $[\theta, 1]$ функция $\frac{p(x-\theta)}{r(x)}$ непрерывна и имеет менее M промежутков возрастания-убывания. Тогда

I) q_j , j=N+1,...,2N-1, меняет знак менее M раз;

II)
$$\max_{N+1 \le \alpha \le \beta \le 2N} \left| \prod_{j=\alpha}^{\beta-1} q_j \right| \le T = \left(\frac{p_{max}}{p_{min}} \right)^M, \quad (87)$$

III)
$$\frac{H}{\varepsilon} \frac{1}{1 + \frac{\tau_{min}}{2\varepsilon} \frac{H}{p_{max}}} \max_{N+1 \le \alpha \le \beta \le 2N} \left| \sum_{\ell=\alpha}^{\beta} \frac{1}{P_\ell} \prod_{j=\alpha}^{\ell-1} q_j \right| \le$$
$$\le S = \frac{2M}{\tau_{min}} \left(\frac{p_{max}}{p_{min}} \right)^{M+1}. \quad (88)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

I) Попытаемся понять, как изменяется знак q_j, j=N+1,...,2N-1.

$$\operatorname{sign}\{q_j\} = \operatorname{sign}\left\{ \frac{p(x_j - \frac{H}{2})}{\tau(x_j)} - \frac{H}{2\varepsilon} \right\}.$$

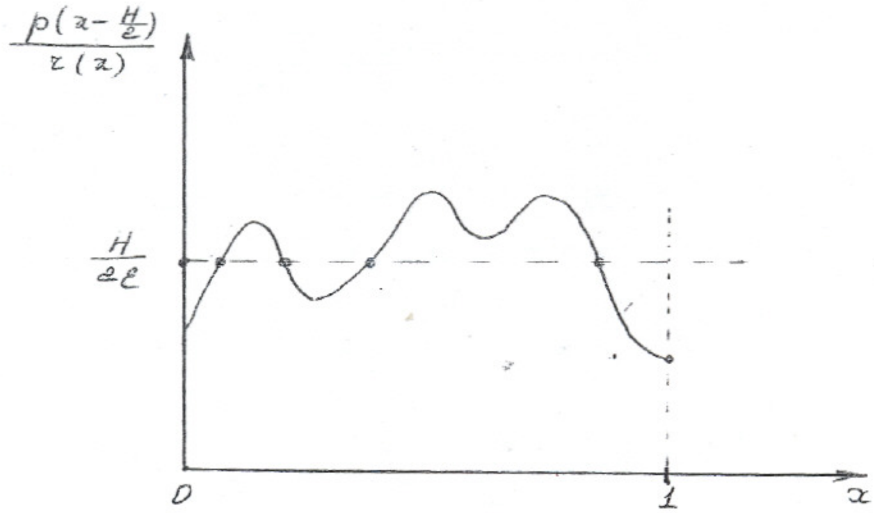

рис. 5.2

На каждый промежуток возрастания-убывания функции $\frac{p(x-\frac{H}{2})}{\tau(x)}$ (рис. 5.2) приходится не более одного нуля функции

$$\left(\frac{p(x-\frac{H}{2})}{\tau(x)} - \frac{H}{2\varepsilon} \right).$$

Отсюда и вытекает утверждение I леммы.

II, III) Введем следующие обозначения:

$$T_{\alpha\beta} = \prod_{\gamma=\alpha}^{\beta-1} q_\gamma,$$

$$S_{\alpha\beta} = \frac{H}{\varepsilon} \frac{1}{1 + \frac{\tau_{min}}{2\varepsilon} \frac{H}{p_{max}}} \sum_{\ell=\alpha}^{\beta} \frac{1}{P_\ell} \prod_{\gamma=\alpha}^{\ell-1} q_\gamma .$$

Оценим сначала $T_{\alpha\beta}$ и $S_{\alpha\beta}$ в двух частных случаях.

а) Пусть $q_\gamma > 0$, $\gamma = \alpha, \ldots, \beta - 1$.

Заметим, что если существует хоть один $q_\gamma > 0$, $\gamma > N$, то

$$Q = \frac{1 - \frac{\tau_{min}}{2\varepsilon} \frac{H}{p_{max}}}{1 + \frac{\tau_{min}}{2\varepsilon} \frac{H}{p_{max}}} > 0,$$

$$q_\gamma \le Q < 1, \quad \gamma = N+1, \ldots, 2N-1.$$

Поэтому $\quad 0 < T_{\alpha\beta} < 1,$

$$0 < S_{\alpha\beta} \le \frac{H}{\varepsilon\, p_{min}} \frac{1}{1 + \frac{\tau_{min}}{2\varepsilon} \frac{H}{p_{max}}} \sum_{\ell=\alpha}^{\beta} Q^{\ell-\alpha} <$$

$$< \frac{p_{max}}{p_{min}} \frac{1}{\tau_{min}} .$$

б) Пусть $q_\gamma < 0$, $\gamma = \alpha, \ldots, \beta - 1$.

Легко проверить, что в этом случае

$$-\frac{P_{\gamma+1}}{P_\gamma} < q_\gamma < 0,$$

поэтому $\quad |T_{\alpha\beta}| < \frac{P_\beta}{P_\alpha} \le \frac{p_{max}}{p_{min}} .$

Для оценки $S_{\alpha\beta}$ оценим

$$\mathfrak{Z}_{\alpha\beta} = \sum_{\ell=\alpha}^{\beta} \frac{1}{P_\ell} \prod_{\gamma=\alpha}^{\ell-1} q_\gamma =$$

$$= \left(\frac{1}{P_\alpha} + \frac{1}{P_{\alpha+1}} q_\alpha\right) + \left(\frac{1}{P_{\alpha+2}} + \frac{1}{P_{\alpha+3}} q_{\alpha+2}\right) q_\alpha q_{\alpha+1} +$$

$$+ \ldots > 0.$$

Аналогично показывается:

$$\frac{1}{P_\alpha} - \tilde{S}_{\alpha\beta} > 0.$$

Отсюда имеем

$$0 < S_{\alpha\beta} < \frac{2}{\tau_{min}} \frac{p_{max}}{p_{min}}.$$

Итак мы оценили $T_{\alpha\beta}$ и $S_{\alpha\beta}$ в двух частных случаях. Учитывая эти оценки и утверждение I леммы, в общем случае для $T_{\alpha\beta}$ и $S_{\alpha\beta}$ получаем:

$$|T_{\alpha\beta}| \le \left(\frac{p_{max}}{p_{min}}\right)^M = T,$$

$$|S_{\alpha\beta}| \le M \cdot \frac{2}{\tau_{min}} \frac{p_{max}}{p_{min}} T = S.$$

Лемма доказана.

4) Попытаемся понять, как ведет себя функция $\tilde{y}_i$, $i = N+1, \dots, 2N$. Согласно (77)-(79) имеем:

$$\tilde{y}_{2N} - \tilde{y}_i = w_{i+1} \frac{H}{\varepsilon} \sum_{\ell=i+1}^{2N} \frac{1}{P_\ell} \prod_{j=i+1}^{\ell-1} q_j,$$

$$\tilde{y}_i - \tilde{y}_N = w_{N+1} \frac{H}{\varepsilon} \sum_{\ell=N+1}^{i} \frac{1}{P_\ell} \prod_{j=N+1}^{\ell-1} q_j.$$

Тогда в силу утверждения III леммы получаем:

$$|\tilde{y}_{2N} - \tilde{y}_i| \le |w_{i+1}| \left(1 + \frac{\tau_{min}}{2\varepsilon} \frac{H}{p_{max}}\right) S, \quad (89)$$

$$|\tilde{y}_i - \tilde{y}_N| \le w_{N+1} \left(1 + \frac{\tau_{min}}{2\varepsilon} \frac{H}{p_{max}}\right) S. \quad (90)$$

Заметим, что для величины

$$\rho = \max_{i>N} |\tilde{y}_i - \tilde{y}_N|, \qquad (91)$$

(90) дает следующее соотношение:

$$\rho \le w_N S. \tag{92}$$

Оценим $\frac{\rho}{\tilde y_N}$, учитывая (90),(83)-(86):

$$\frac{\rho}{\tilde y_N} \le \frac{S\, q_{max}^{\;N-1}}{\frac{1}{r_{max}} \frac{p_{min}}{p_{max}} \left(1 - q_{min}^{\;N}\right)} \le$$

$$\le S\, r_{max} \frac{p_{max}}{p_{min}} \frac{1}{N^{\frac{r_{min}}{p_{max}} c}} \left[1 + O\left(\frac{\ln^3 N}{N^2} + \frac{1}{N^{\frac{r_{max}}{p_{min}} c}}\right)\right].$$

Т.е. при достаточно больших N

$$\frac{\rho}{\tilde y_N} \le A < 1. \tag{93}$$

5) Приступаем к исследованию G_{ik}, $k \ge N$.

В силу утверждений II,III леммы имеем:

$$\left| \frac{\tilde y_{2N} - \tilde y_i}{w_{k+1} \left(1 + \frac{R_k}{2\varepsilon} \frac{H}{P_{k+1}}\right)} \right| \le \left| \frac{w_{i+1}}{w_{k+1}} \right| S \le TS, \quad i \ge k \ge N.$$

Поэтому

$$|G_{ik}| \le \frac{S\,T}{\tilde y_{2N}} \begin{cases} \tilde y_i, & i \le k, \\ \tilde y_k, & i \ge k, \end{cases} \le S\,T \max_{i \le k} \frac{\tilde y_i}{\tilde y_{2N}}.$$

Учтем, что $\tilde y_i \le \tilde y_N$, $i \le N$.

Учтем также вытекающее из (91) неравенство

$$\tilde y_N - \rho \le \tilde y_i \le \tilde y_N + \rho, \quad i > N,$$

и (93). В результате имеем:

$$G_{ik} \le ST \frac{\tilde{y}_N + \rho}{\tilde{y}_N - \rho} \le ST \frac{1+A}{1-A}, \quad k \ge N.$$

Таким образом, при $k \ge N$ G_{ik} равномерно ограничена.

5) Оценим G_{ik}, $k < N$.

Воспользуемся возрастанием $\tilde{y}_i$, $i \le N$ и соотношением (91). В результате имеем:

$$|\tilde{y}_{2N} - \tilde{y}_i| \le \tilde{y}_N - \tilde{y}_k + |\tilde{y}_N - \tilde{y}_{2N}| \le \tilde{y}_N - \tilde{y}_k + \rho,$$
$$k \le i \le N,$$

$$|\tilde{y}_{2N} - \tilde{y}_i| \le 2\rho, \quad k \le N \le i,$$

т.е. $|\tilde{y}_{2N} - \tilde{y}_i| \le \tilde{y}_N - \tilde{y}_k + 2\rho, \quad k \le i.$

Отсюда, вновь учитывая возрастание $\tilde{y}_i$, $i \le N$ получаем

$$|G_{ik}| \le \frac{\tilde{y}_N - \tilde{y}_k + 2\rho}{w_{k+1}\left(1 + \frac{R_k}{2\varepsilon}\frac{h}{p_{k+1}}\right)} \frac{\tilde{y}_k}{\tilde{y}_{2N}}.$$

Согласно (77),(78),(81),(82), имеем

$$\frac{\tilde{y}_N - \tilde{y}_k}{w_{k+1}\left(1 + \frac{R_k}{2\varepsilon}\frac{h}{p_{k+1}}\right)} \le \frac{1}{1 + \frac{\tau_{min}}{2\varepsilon}\frac{h}{p_{max}}} \cdot \frac{h}{\varepsilon} \cdot \sum_{\ell=k+1}^{N} \frac{1}{p_\ell} \frac{w_\ell}{w_{k+1}} \le$$

$$\le \frac{h}{\varepsilon} \frac{1}{p_{min}} \frac{1}{1 + \frac{\tau_{min}}{2\varepsilon}\frac{h}{p_{max}}} \sum_{\ell=k+1}^{N} q_{max}^{\ell-k-1} \le \frac{p_{max}}{p_{min}} \frac{1}{\tau_{min}}.$$

Для следующей оценки воспользуемся (92) и (82):

$$\frac{\rho}{w_{k+1}\left(1 + \frac{R_k}{2\varepsilon}\frac{h}{p_{k+1}}\right)} \le S \frac{w_N}{w_{k+1}} \le S.$$

Наконец, в силу (93)

$$\frac{\tilde{g}_K}{g_{eN}} \le \frac{\tilde{g}_N}{\tilde{g}_N - \rho} \le \frac{1}{1-A}.$$

Полученные оценки дают:

$$|G_{iK}| \le \left(\frac{1}{r_{min}}\ \frac{p_{max}}{p_{min}} + S\right)\frac{1}{1-A}, \quad K < N.$$

Итак, равномерная по параметру ограниченность функции Грина сеточной задачи доказана.

5.3. ПОГРЕШНОСТЬ АППРОКСИМАЦИИ

Воспользуемся следующим представлением решения задачи (62), (63) ([9]):

$$u(x) = v(x) + z(x) \tag{94}$$

где
$$v(x) = \gamma \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\ \frac{r(0)}{p(0)}\, x\right\}, \tag{95}$$

γ – некоторая зависящая от ε постоянная,

$|\gamma| \le a$,

$$|z^{(k)}(x)| \le a\left[1 + \varepsilon^{3-k} \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\ \frac{r_{min}}{p_{max}}\, x\right\}\right],$$
$$k = 0, 1, \ldots, \tag{96}$$

a – некоторая не зависящая от ε постоянная.

Отсюда, учитывая гладкость $p(x)$ и $r(x)$, получаем следующие оценки для погрешности аппроксимации (71):

$$|\psi_i| \le A\left[1 + \frac{1}{\varepsilon^3} \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\ \frac{r(0)}{p(0)}\, x_{i-1}\right\}\right] \hbar_i^2,$$
$$i \ne N, \tag{97}$$

где A – некоторая постоянная.

Наша цель состоит в оценке величины

$$(1, \psi) = \sum_{i=1}^{2N-1} \psi_i \bar{h}_i = \sum_{i=1}^{N-1} \psi_i h + \psi_N \bar{h} + \psi_{N+1} H + \sum_{i=N+2}^{2N-1} \psi_i H. \tag{98}$$

Начнем с оценки первого слагаемого в этой сумме. Для этого воспользуемся соотношением (97) для ψ_i:

$$\Big|\sum_{i=1}^{N-1} \psi_i h\Big| \le A\Big[h^2 + \Big(\frac{h}{\varepsilon}\Big)^3 \sum_{i=1}^{N-1} \exp\Big\{-\frac{1}{\varepsilon}\frac{z(0)}{p(0)} x_{i-1}\Big\}\Big].$$

Заметим, что согласно квадратурной формуле прямоугольников,

$$h \exp\Big\{-\frac{1}{\varepsilon}\frac{z(0)}{p(0)} x_{i-1}\Big\} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \exp\Big\{-\frac{1}{\varepsilon}\frac{z(0)}{p(0)} x\Big\}dx + O\Big(\frac{h^2}{\varepsilon}\Big).$$

Поэтому

$$\Big|\sum_{i=1}^{N-1} \psi_i h\Big| \le A\Big[h^2 + \frac{h^2}{\varepsilon^3}\int_0^{\sigma} \exp\Big\{-\frac{1}{\varepsilon}\frac{z(0)}{p(0)} x\Big\}dx + O\Big(\frac{h^2}{\varepsilon^3}\frac{h^2}{\varepsilon}N\Big)\Big]$$

$$= O\Big(\Big(\frac{\ln N}{N}\Big)^2\Big). \tag{99}$$

Для оценки последнего слагаемого воспользуемся соотношением (97) для ψ_i и (15):

$$\Big|\sum_{i=N+2}^{2N-1} \psi_i H\Big| \le A\Big[H^2 + \frac{H^2}{\varepsilon^2}\sum_{i=N+2}^{\infty} \exp\Big\{-\frac{1}{\varepsilon}\frac{z(0)}{p(0)} x_{i-1}\Big\}\Big] \le$$

$$\le A\Big[H^2 + \exp\Big\{-\frac{1}{\varepsilon}\frac{z(0)}{p(0)}\sigma\Big\}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{H^2}{\varepsilon^2}\exp\Big\{-\frac{H}{\varepsilon}\frac{z(0)}{p(0)} j\Big\}\Big].$$

Учтем, что в силу (68)

$$\exp\Big\{-\frac{1}{\varepsilon}\frac{z(0)}{p(0)}\sigma\Big\} = \exp\Big\{-\frac{z(0)}{p(0)} c \ln N\Big\} = N^{-c\frac{z(0)}{p(0)}} \le \frac{1}{N^2}.$$

Учтем также, что

$$\frac{H^2}{\varepsilon^2}\exp\Big\{-\frac{H}{\varepsilon}\frac{z(0)}{p(0)} j\Big\} \le \frac{b}{j^2},$$

где b – некоторая постоянная,

и что ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$ сходится.

В результате имеем:

$$\left| \sum_{i=N+2}^{2N_0-1} \psi_i H \right| = O\left(\frac{1}{N^2}\right). \qquad (100)$$

Нам осталось оценить $(\psi_N \hbar + \psi_{N+1} H)$ в сумме (98). Для этого нам потребуется более тонкая оценка ψ_i в узлах N и N+1.

Согласно (71),(94)-(96),

$$\psi_i = (L_h u - L u)_i = \psi_{v,i} + \psi_{z,i},$$

где

$$\psi_{z,i} = O(\hbar_i),$$

$$\psi_{v,i} = (L_h v - L v)_i .$$

Из (65) имеем:

$$|(L_h v)_i| \le \frac{\varepsilon}{\hbar_i} p_{max} (|v_{x,i}| + |v_{\bar{x},i}|) + \frac{r_{max}}{2\hbar_i}(|v_{i+1}| + |v_{i-1}|) \le$$

$$\le \frac{B}{\hbar_i} \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon} \frac{r(0)}{p(0)} x_{i-1}\right\},$$

где B - некоторая постоянная.

Отсюда, учитывая (15) и (68), получаем

$$(L_h v)_i = \frac{1}{\hbar_i} O\left(\frac{1}{N^2}\right), \quad i = N, N+1.$$

Займемся теперь оценкой $(L v)_i$:

$$|(L v)_i| = |(\varepsilon (p v')' + r v')_i| =$$

$$= |(p(x_i) - p(0)) \varepsilon v_i'' + (r(x_i) - r(0)) v_i' + \varepsilon (p' v')_i| .$$

Учитывая гладкость $p(x)$ и $r(x)$, а также (15) и (68), получаем:

$$|(L v)_i| \le B \frac{x_i}{\varepsilon} \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon} \frac{r(0)}{p(0)} x_i\right\},$$

где B - некоторая постоянная,

$$(Lv)_i = O\left(\frac{\ln N}{N^2}\right), \quad i = N, N+1.$$

Это соотношение завершает оценку ψ_i, $i = N, N+1$.

В результате имеем:

$$\psi_i = \frac{1}{h_i} O\left(\frac{1}{N^2}\right), \quad i = N, N+1,$$

$$\psi_N h + \psi_{N+1} H = O\left(\frac{1}{N^2}\right). \qquad (101)$$

Подведем итоги. Из полученных нами оценок (99)-(101) следует:

$$(1, \psi) = \sum_{i=1}^{2N-1} \psi_i h_i = O\left(\left(\frac{\ln N}{N}\right)^2\right), \qquad (102)$$

Таким образом, теорема о сходимости схемы с центральной разностью на кусочно-равномерной сетке с порядком $\left(\frac{\ln N}{N}\right)^2$ доказана.