6. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

6.0. ОБОЗНАЧЕНИЯ

I) СЕТКИ

Введем на отрезке [0,1]

- равномерную сетку

$$\{ \bar{\omega} = x_i = ih, \quad i = 0, \dots, n \},$$

с шагом $h = \frac{1}{n}$;

- кусочно-равномерную сетку

$$\hat{\bar{\omega}} = \left\{ x_i = \begin{cases} i h_1, & i = 0, \dots, n_1, \\ \sigma + (i - n_1) h_2, & i = n_1, \dots, n \end{cases} \right\}$$

рис. 6.0

где

$$\sigma = \min \{ \varepsilon \, c \, \ln n_1, \frac{n_1}{n} \},$$

c - некоторая постоянная,

$$h_1 = \frac{\sigma}{n_1}, \qquad h_2 = \frac{1 - \sigma}{n_2}, \qquad h_{12} = \frac{h_1 + h_2}{2},$$

$$n = n_1 + n_2,$$

$$weight = \frac{n_1}{n_2}.$$

Пусть ω и $\hat{\omega}$ - соответствующие сетки из внутренних узлов.

Заметим, что т.к. величина σ мала, то на рисунках отрезок

$[0,\sigma]$ растянут, причем в последней строке рисунка указан масштаб соотношения длин на отрезках $[0,\sigma]$ и $[\sigma,1]$.

II) РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

На введенных сетках будем рассматривать следующие уравнения:

1.
$$\varepsilon y_{\bar{x}\hat{x}} + y_{\overset{\circ}{x}} = -F,$$
$$\varepsilon (P y_{\bar{x}})_{\hat{x}} + R y_{\overset{\circ}{x}} = -F;$$

2.
$$\varepsilon y_{\bar{x}\hat{x}} + \frac{1}{2}(y_x + y_{\bar{x}}) = 0;$$

3.
$$\varepsilon y_{\bar{x}\hat{x}} + \frac{h}{2\hbar} y_x + \frac{h_+}{2\hbar} y_{\bar{x}} = 0.$$

Данная нумерация соответствует нумерации схем в таблицах и на рисунках.

III) СЕТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ

В качестве результатов расчетов приводятся значения следующих сеточных функций:

$u(x_i)$ - решения дифференциальной задачи в узлах сетки,

y_i - решения сеточной задачи,

$z_i = y_i - u(x_i)$ - погрешности решения.

Также приводятся значения

$$z_{max\,1} = \max_{0 \le i \le n_1} |z_i|,$$

$$z_{max\,2} = \max_{n_1 < i \le n} |z_i|,$$

$$z_{max} = \max_{0 \le i \le n} |z_i|$$

и $I_{max\,1}$, $I_{max\,2}$, I_{max} – номера узлов, в которых достигаются соответствующие максимумы.

6.1. ОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим на [0,1] задачу

$$\varepsilon u'' + u' = 0, \qquad 0 < x < 1,$$
$$u(0) = 1, \qquad u(1) = 0.$$

В решении этой задачи

$$u(x) = \frac{e^{-\frac{x}{\varepsilon}} - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}$$

в окрестности точки x=0 возникает пограничный слой с быстро меняющимся решением.

Рис. 6.1 и 6.2 показывают, что сеточное решение, получаемое по схеме с центральной разностью на равномерной сетке

$$\varepsilon y_{\bar{x}\overset{\circ}{x}} + y_{\overset{\circ}{x}} = 0, \qquad x \in \omega,$$

при $\varepsilon = 10^{-4}$, n=15 и n=16 не имеет ничего общего с решением нашей дифференциальной задачи.

Посмотрим теперь результаты расчетов этой задачи по схеме 1 на кусочно-равномерной сетке

$$\varepsilon y_{\bar{x}\hat{x}} + y_{\overset{\circ}{x}} = 0, \qquad x \in \hat{\omega}.$$

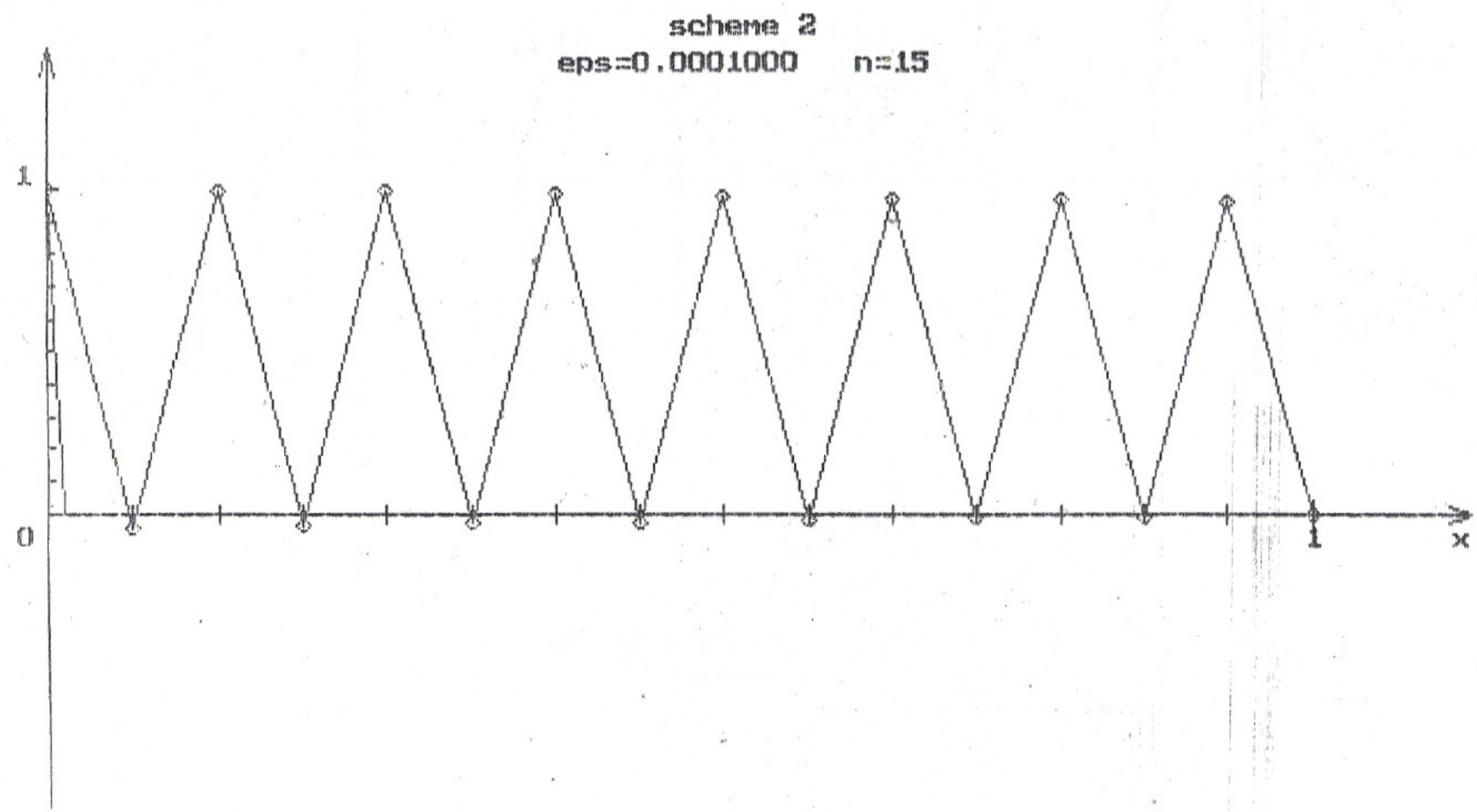
Рис. 6.3 и табл. 1 показывают поведение y_i, $u(x_i)$ и z_i в узлах сетки при $\varepsilon = 10^{-4}$, $n_1 = 5$, $n_2 = 15$. С помощью табл. 2 можно проследить, как изменяется z_{max} при изменении ε и n_2. Эти результаты подтверждают сделанный в разделе 3 вывод о сходимости схемы с центральной разностью на кусочно-равномерной сетке с порядком $\left(\frac{\ln n_1}{n_1}\right)^2$.

Рассмотрим еще две схемы на кусочно-равномерной сетке:

2. $$\varepsilon y_{\bar{x}\hat{x}} + \frac{1}{2}\left(y_x + y_{\bar{x}}\right) = 0, \quad x \in \hat{\omega},$$

3. $$\varepsilon y_{\bar{x}\hat{x}} + \frac{h}{2\hbar} y_x + \frac{h_+}{2\hbar} y_{\bar{x}} = 0, \quad x \in \hat{\omega}$$

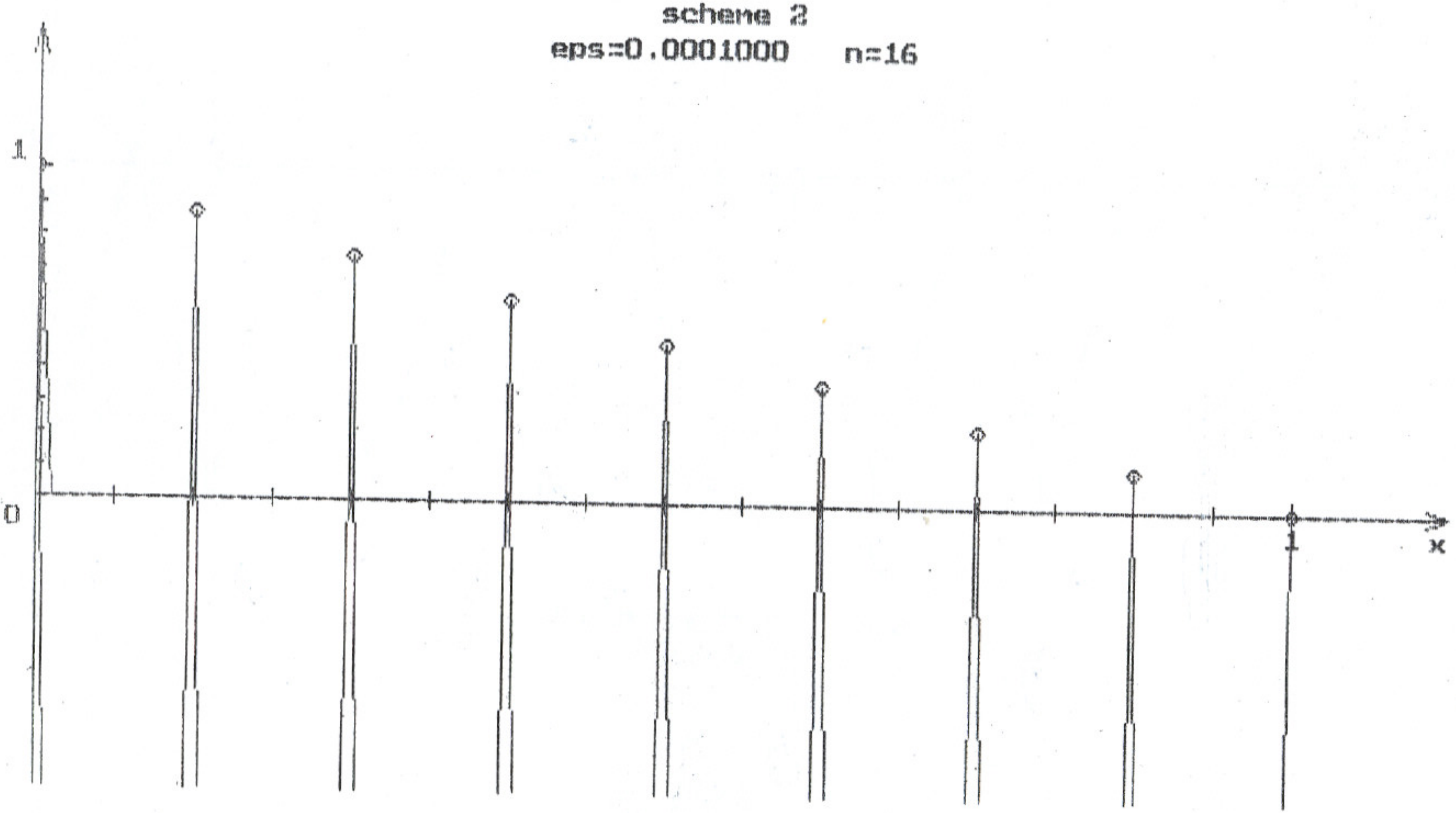
Эти схемы отличаются от схемы 1 лишь в узле n_1. Однако сеточные решения, получаемые по этим схемам, не имеют ничего общего с решением дифференциальной задачи. Этот обоснованный в разделе 3 факт иллюстрирует рис. 6.4, на котором изображены графики $u(x)$ и y_i при $\varepsilon = 10^{-4}$, $n_1 = 5$, $n_2 = 15$.



picture 6.1

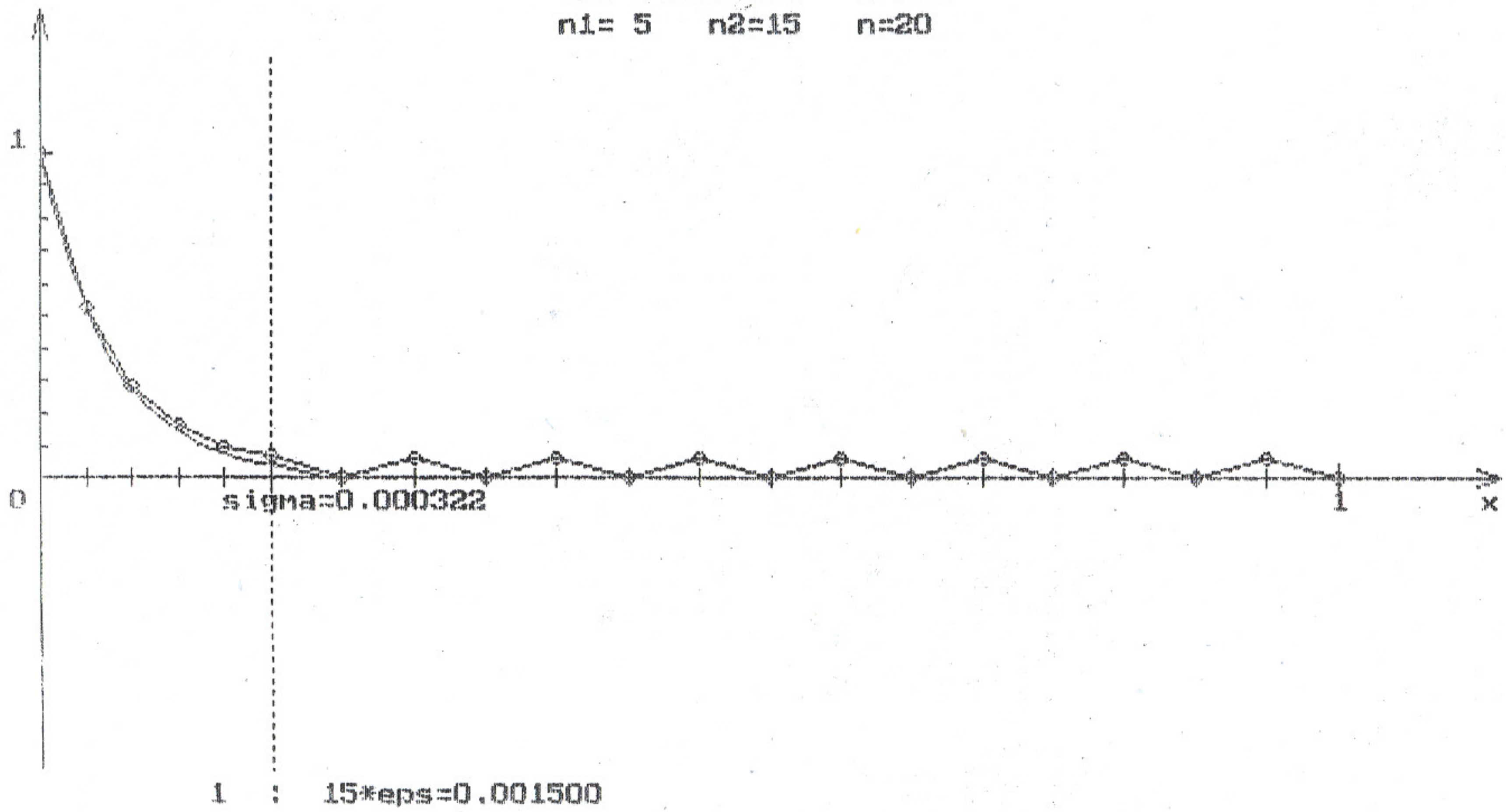
scheme 2

eps=0.0001000 n=16

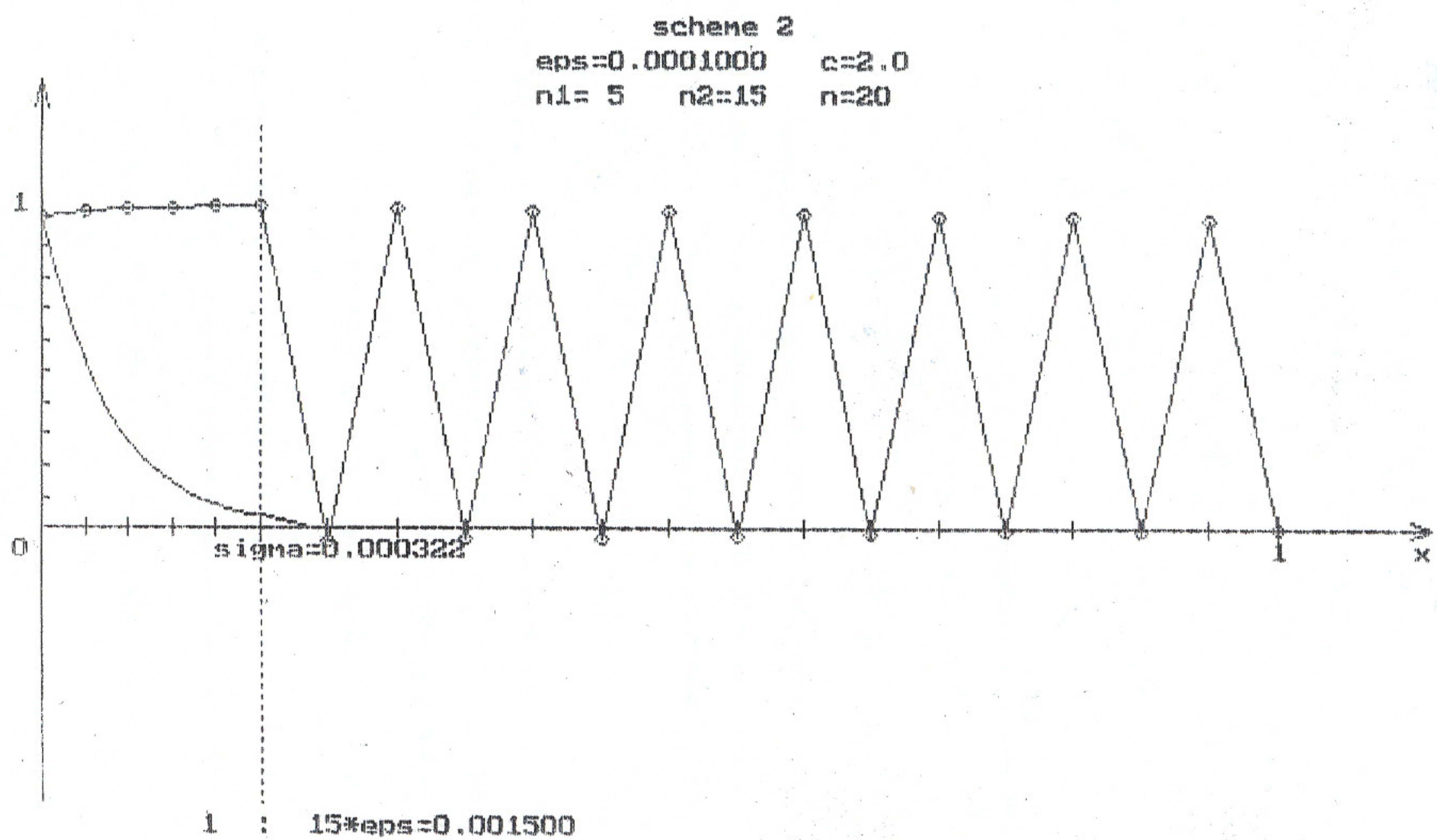


picture 6.2

scheme 1
eps=0.0001000   c=2.0
n1= 5   n2=15   n=20



picture 6.3


scheme 2
eps=0.0001000 c=2.0
n1= 5 n2=15 n=20
1
0
sigma=0.000322
1
x
1 : 15*eps=0.001500

picture 6.4

6.2. НЕОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим на отрезке [0,1] задачу

$$\varepsilon u'' + u' = -f, \qquad 0 < x < 1,$$

$$u(0) = 0, \qquad u(1) = 0$$

с правой частью

$$f(x) = 5\varepsilon x\left[\left(\left(\frac{\pi}{2}x\right)^2 - 6\right)\cos\frac{\pi}{2}x + 6x\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x\right] +$$
$$+ 5x^2\left[\frac{\pi}{2}x\sin\frac{\pi}{2}x - 3\cos\frac{\pi}{2}x\right],$$

график которой изображен на рис. 6.5.

Решение этой задачи

$$u(x) = 5x^3\cos\frac{\pi}{2}x$$

- гладкая функция, не имеющая пограничного слоя.

Посмотрим результаты расчетов этой задачи по схеме с центральной разностью на равномерной сетке

$$\varepsilon y_{\bar{x}x} + y_{\overset{\circ}{x}} = -F, \qquad x \in \omega.$$

Табл. 3 показывает, как изменяется величина z_{max} при уменьшении ε в случаях n=15 и n=16. Эти результаты подтверждают сделанные в разделе 4 выводы: при n=16

$$\lim_{\varepsilon \to 0} z_{max} = \infty.$$

Сравним это с результатами расчетов по схеме с центральной разностью на кусочно-равномерной сетке

$$\varepsilon y_{\bar{x}\hat{x}} + y_{\overset{\circ}{\hat{x}}} = -F, \qquad x \in \hat{\omega}.$$

С помощью рис. 6.8 и табл. 4 можно проследить поведение y_c, $u(x_c)$ и x_c в узлах сетки при $\varepsilon = 10^{-4}$, $n_1 = 5$, $n_2 = 16$.

Для полноты картины рассмотрим задачу

$$\varepsilon u'' + u' = -f, \qquad 0 < x < 1,$$

$$u(0) = 1, \qquad u(1) = 0.$$

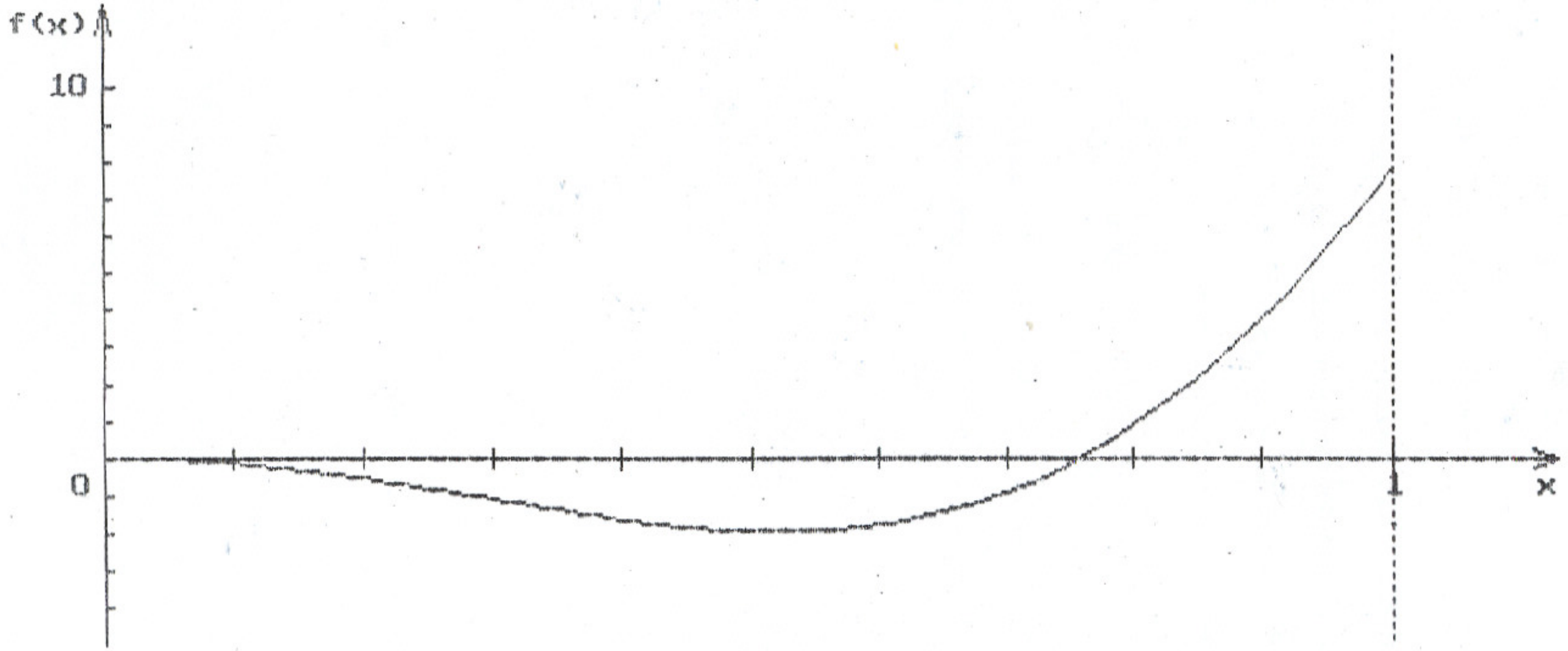
Решение этой задачи содержит как ненулевую гладкую составляющую, так и погранслойную составляющую.

Расчеты этой задачи по схеме с центральной разностью на кусочно-равномерной сетке

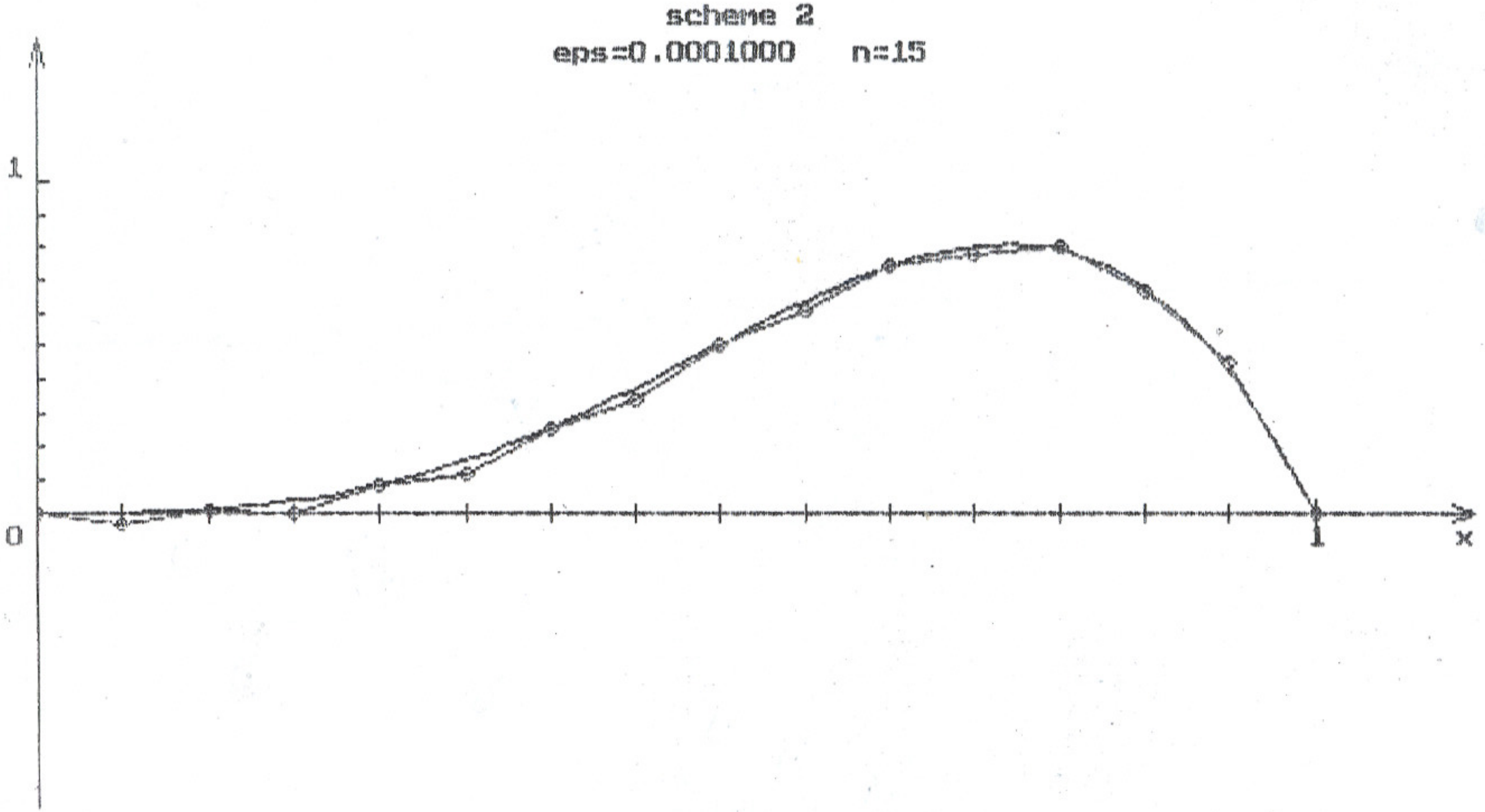
$$\varepsilon y_{\bar{x}\hat{x}} + y_{\mathring{x}} = -F, \qquad x \in \hat{\omega}$$

при различных ε, n_1, n_2=10,15,20,30 (рис. 6.9, табл. 5-8) показывают равномерную по ε сходимость схемы.

```
f(x) =
= 5*x*x*(x*(pi/2)*sin(pi*x/2)-3*cos(pi*x/2)) +
+ 5*eps*x*( 6*x*(pi/2)*sin(pi*x/2) +
+ (x*x*pi*pi/4-6)* cos(pi*x/2))
```

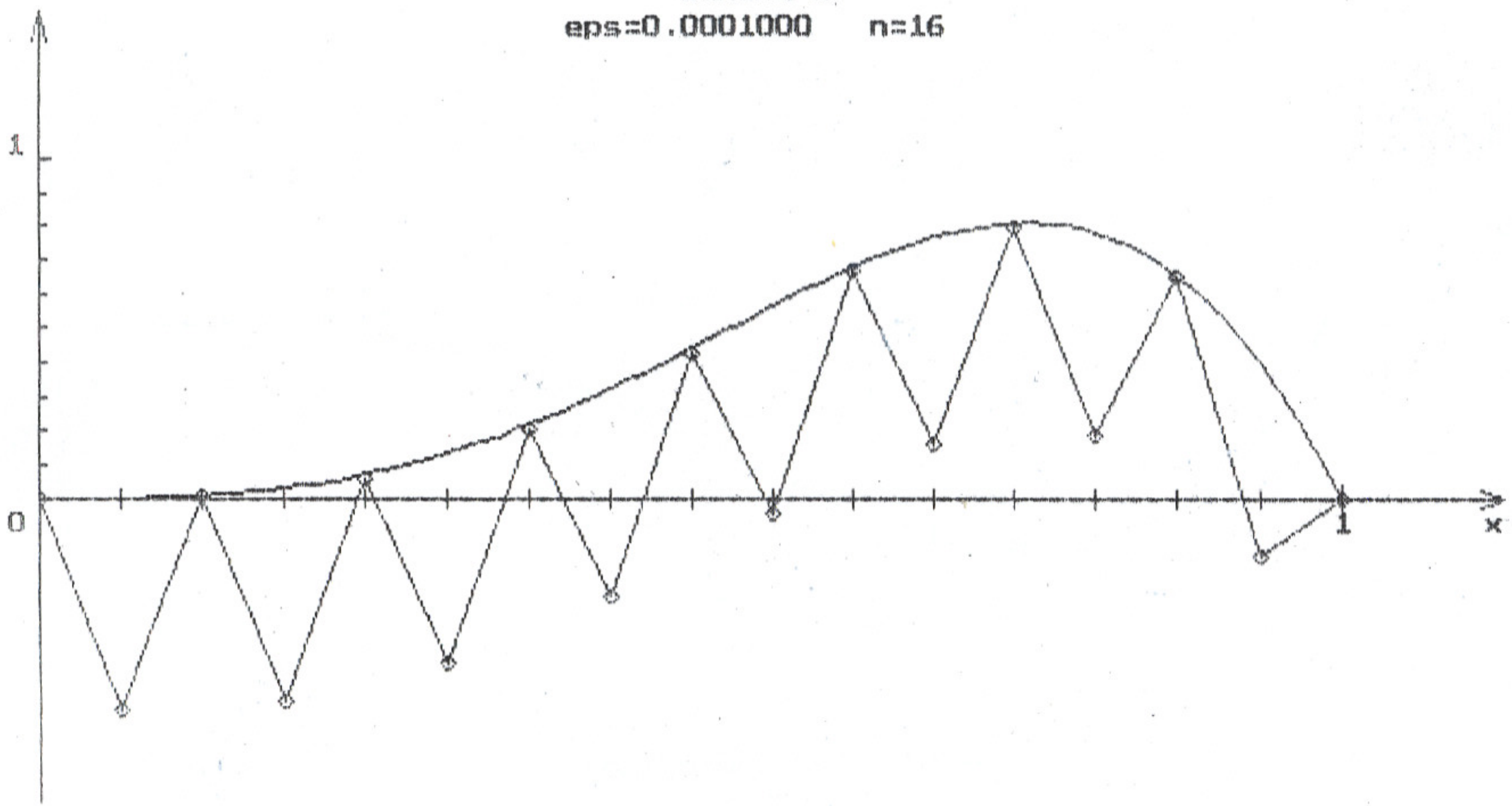


picture 6.5

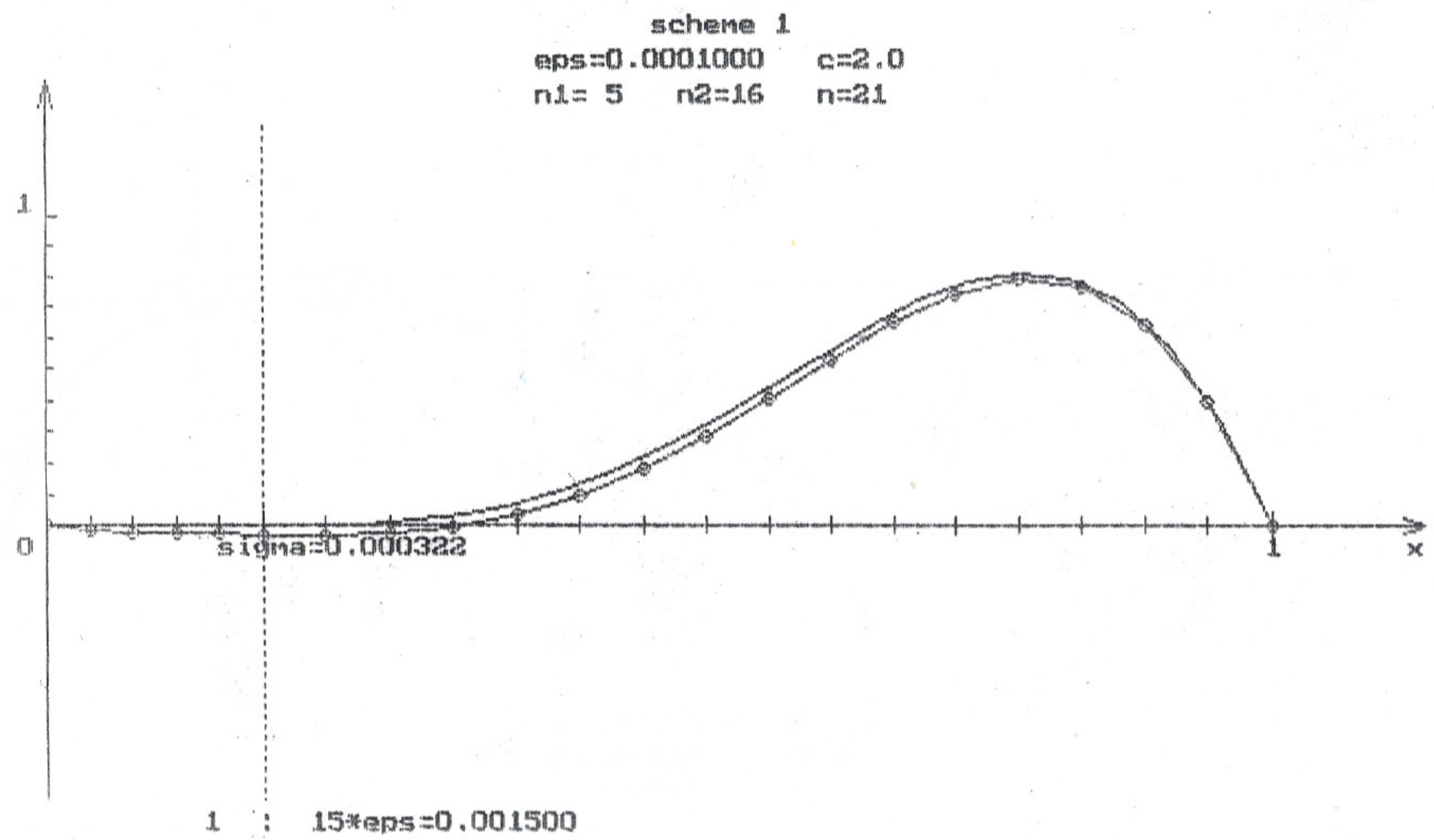


picture 6.6

schene 2
eps=0.0001000   n=16

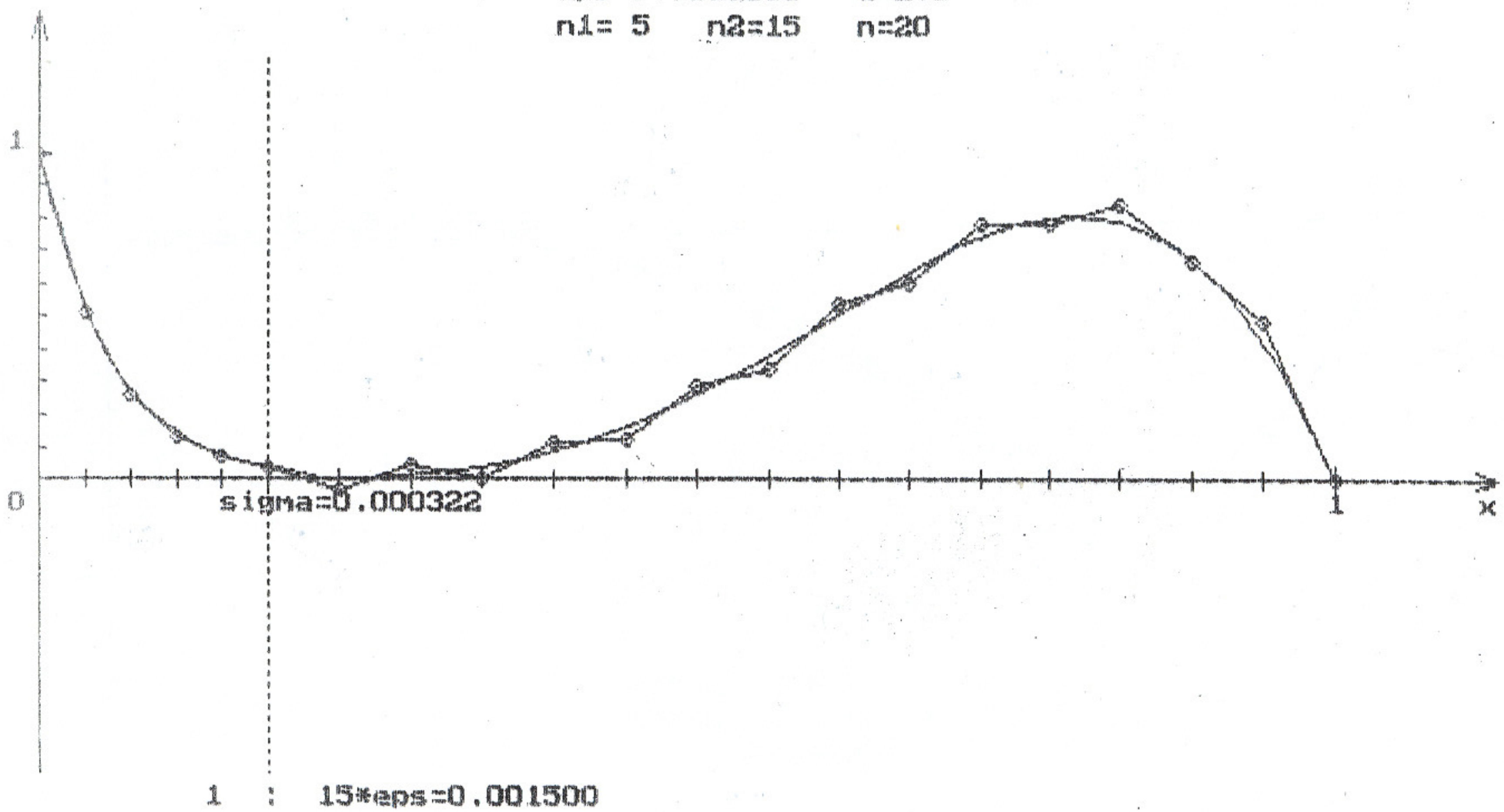


picture 6.7


scheme 1
eps=0.0001000 c=2.0
n1= 5 n2=16 n=21
1
0
sigma=0.000322
1
x
1 : 15*eps=0.001500

picture 6.8

scheme 1
eps=0.0001000   c=2.0
n1= 5   n2=15   n=20



picture 6.9

6.3. УРАВНЕНИЕ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим задачу на отрезке [0,1]

$$\varepsilon u'' + r(x)\cdot u' = -f(x), \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0) = 1, \qquad u(1) = 0$$

при
$$r(x) = \frac{1}{x+1}.$$

Будем вести расчеты этой задачи по схеме

$$\varepsilon y_{\bar{x}\hat{x}} + R\, y_{\hat{x}} = -F, \quad x \in \hat{\omega}$$

на кусочно-равномерной сетке.

Значения z_{max} при $f(x)=0$, $n_2=15$ различных ε и n_1 приведены в табл. 9,

при
$$f(x) = 5\varepsilon x\left[\left(\left(\frac{\pi}{2}x\right)^2 - 6\right)\cos\frac{\pi}{2}x + 6x\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x\right] + \frac{5x^2}{x+1}\left[\frac{\pi}{2}x\sin\frac{\pi}{2}x - 3\cos\frac{\pi}{2}x\right],$$

n_2 =15,30, различных ε и n_1 - в табл. 10.

Эти результаты подтверждают обоснованную в разделе 5 сходимость схемы с центральной разностью на кусочно-равномерной сетке.