1. МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим краевую задачу на отрезке [0,1] с малым параметром ε при старшей производной:

$$\varepsilon u'' + u' = 0, \qquad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$u(0) = 1, \qquad u(1) = 0, \tag{2}$$

где $\qquad \varepsilon \in (0, 1]$.

Решением этой задачи является функция

$$u(x) = \frac{e^{-\frac{x}{\varepsilon}} - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}, \tag{3}$$

вид которой изображен на рис. 1.1.

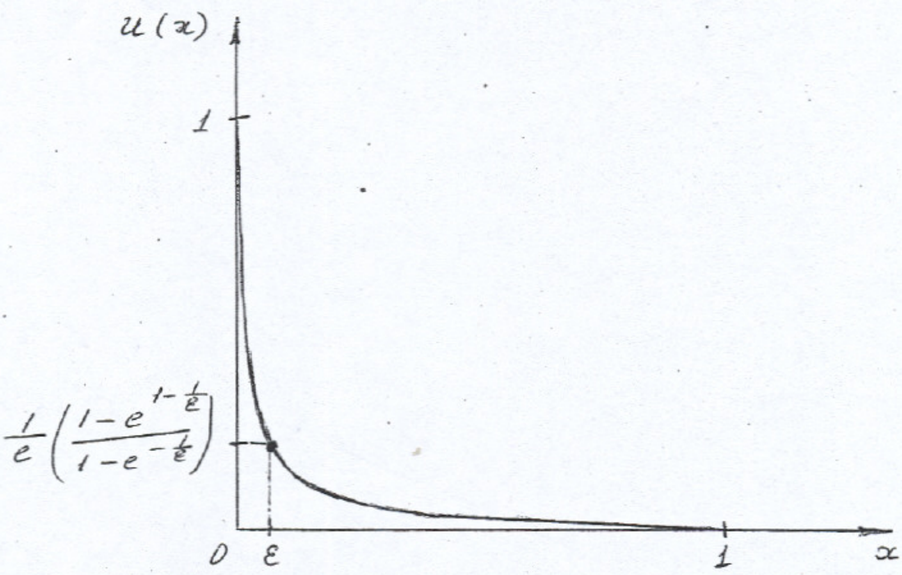

рис. 1.1

Устремим ε к нулю в решении $u(x)$. В результате получим предельную функцию

$$\overline{u}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} u(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & 0 < x \le 1. \end{cases} \qquad (4)$$

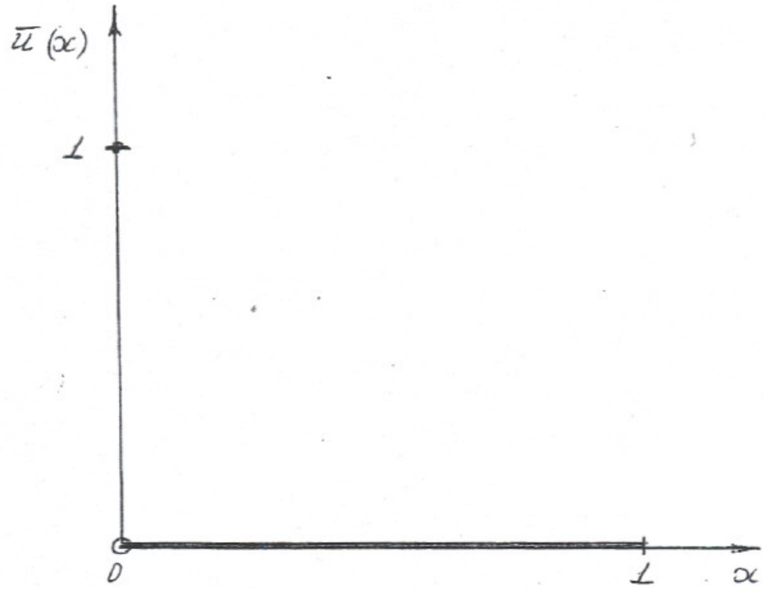

рис. 1.2

Теперь рассмотрим уравнение (1) при $\varepsilon = 0$:

$$u_0'(x) = 0, \qquad 0 < x < 1. \qquad (5)$$

Уравнение (1) вырождается в обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка. Чтобы определить его единственное решение необходимо и достаточно учесть одно граничное условие:

$$u_0(1) = 0. \qquad (6)$$

Решение задачи (5),(6)

$$u_0 \equiv 0. \qquad (7)$$

Таким образом, в решении краевой задачи (1),(2) в окрестности точки $x=0$ возникает пограничный слой с быстро меняющимся решением. Чем меньше ε , тем уже пограничный слой и тем быстрее уменьшается $u(x)$ на этом пограничном слое.

2. СХЕМА С ЦЕНТРАЛЬНОЙ РАЗНОСТЬЮ НА РАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ

В данной работе исследуются схемы с центральной разностной производной на кусочно-равномерной сетке. Но прежде чем перейти к этому рассмотрим одну из классических схем - схему с центральной разностью на равномерной сетке.

Введем на отрезке [0,1] равномерную сетку

$$\overline{\omega} = \{ x_i = iH, \quad i = 0, 1, \ldots, N \}$$

с шагом $H = \frac{1}{N}$.

Соответствующая сетка из внутренних узлов

$$\omega = \{ x_i, \quad i = 1, \ldots, N-1 \}.$$

Рассмотрим на сетке $\overline{\omega}$ задачу

$$\varepsilon y_{\bar{x}x} + y_{\mathring{x}} = 0, \qquad x \in \omega, \tag{8}$$

$$y_0 = 1, \quad y_N = 0. \tag{9}$$

Эта задача аппроксимирует дифференциальную задачу (1),(2) со вторым порядком по H.

Уравнение (8) можно записать в виде:

$$\varepsilon \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{H^2} + \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2H} = 0.$$

Это однородное разностное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его характеристический многочлен имеет корни 1 и

$$Q = \frac{2\varepsilon - H}{2\varepsilon + H}. \tag{10}$$

Общее решение уравнения (8)

$$y_i = c_1 + c_2 Q^i, \tag{11}$$

где c_1, c_2 - произвольные постоянные, которые определяются из граничных условий (9). В результате получим

$$y_i = \frac{Q^i - Q^N}{1 - Q^N}. \tag{12}$$

При $\varepsilon \ll \frac{H}{2}$ имеем $Q \approx -1$. В этом случае решение задачи (8),(9) не имеет ничего общего с решением дифференциальной задачи (1),(2).

Этот факт подтверждается графиками y_i и $u(x)$ при $\varepsilon = 10^{-4}$, $N=15$ и $N=16$, изображенными на рис. 6.1 и 6.2.

Говорить о равномерной по ε сходимости не приходится.

3. СХЕМЫ С ЦЕНТРАЛЬНОЙ РАЗНОСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ НА КУСОЧНО-РАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ

3.1. КУСОЧНО-РАВНОМЕРНАЯ СЕТКА

Выделим на отрезке [0,1] интервал $[0,\sigma]$,

где
$$\sigma = \min\{\varepsilon\, c \ln N, \tfrac{1}{2}\}, \qquad (13)$$

с - некоторая постоянная.

Введем на [0,1] кусочно-равномерную сетку $\hat{\bar{\omega}}$ с шагом h на $[0,\sigma]$ и шагом H на $[\sigma,1]$ таким образом, чтобы узлы этой сетки разбивали интервалы $[0,\sigma]$ и $[\sigma,1]$ на N частей:

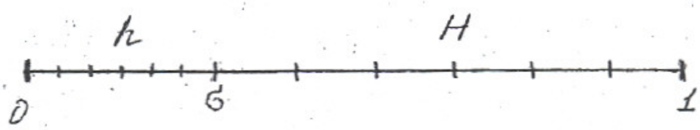

рис. 3.1

$$hN = \sigma, \qquad HN = 1-\sigma, \qquad (14)$$

$$\hat{\bar{\omega}} \doteq \left\{ x_i = \begin{cases} ih, & i = 0,\dots,N, \\ \sigma + (i-N)H, & i = N,\dots,2N \end{cases} \right\}. \qquad (15)$$

Соответствующая сетка из внутренних узлов

$$\hat{\omega} = \{ x_i, \; i = 1, \dots, 2N-1 \}.$$

Обозначим

$$\bar{h} = \frac{h+H}{2} = \frac{1}{2N}. \qquad (16)$$

3.2. СЕМЕЙСТВО СХЕМ С ЦЕНТРАЛЬНОЙ РАЗНОСТЬЮ НА КУСОЧНО-РАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ

1. Рассмотрим на сетке $\hat{\hat{\omega}}$ семейство схем

$$\varepsilon y_{\bar{x}x} + y_{\mathring{x}} = 0, \quad i = 1, \ldots, N-1, N+1, \ldots, 2N-1, \tag{17}$$

$$\varepsilon y_{\bar{x}\hat{x},N} + \alpha y_{x,N} + \beta y_{\bar{x},N} = 0, \tag{18}$$

$$\alpha + \beta = 1,$$

$$y_0 = 1, \quad y_{2N} = 0. \tag{19}$$

Здесь
$$y_{\mathring{x},i} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{h_i + h_{i+1}}. \tag{20}$$

Исследуем случаи:

I) $\alpha = \dfrac{H}{2\hbar}, \quad \beta = \dfrac{h}{2\hbar}.$

В этом случае (17),(18) обращается в уравнение

$$\varepsilon y_{\bar{x}\hat{x}} + y_{\mathring{x}}, \quad x \in \hat{\omega}.$$

II) $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}.$

Тогда имеем уравнение

$$\varepsilon y_{\bar{x}\hat{x}} + \frac{1}{2}(y_x + y_{\bar{x}}) = 0, \quad x \in \hat{\omega}.$$

III) $\alpha = \dfrac{h}{2\hbar}, \quad \beta = \dfrac{H}{2\hbar},$

т.е.

$$\varepsilon y_{\bar{x}\hat{x}} + \frac{h}{2\hbar} y_x + \frac{H}{2\hbar} y_{\bar{x}} = 0, \quad x \in \hat{\omega}.$$

Заметим, что разностное уравнение (17),(18) аппроксимирует дифференциальное уравнение (1) с первым порядком по Н, а в случае III) выражение $(\alpha y_x + \beta y_{\bar{x}})_N$ аппроксимирует член $u'(x_N)$ со вторым порядком по Н.

2. Решим разностную задачу (17)-(19). Сначала удовлетворим (17). В силу (10,(11) имеем:

$$y_i = \begin{cases} c_1 + c_2\, q^i, & i = 0, \dots, N, \\ c_3 + c_4\, Q^i, & i = N, \dots, 2N. \end{cases} \qquad (21)$$

Здесь

$$q = \frac{2\varepsilon - h}{2\varepsilon + h}, \qquad Q = \frac{2\varepsilon - H}{2\varepsilon + H}, \qquad (22)$$

$c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4$ - произвольные постоянные.

Соотношение (21) с учетом граничных условий (19) можно переписать следующим образом:

$$y_i = \frac{v_i - v_{2N}}{v_0 - v_{2N}}, \qquad (23)$$

$$v_i = \begin{cases} q^i + a\, q^N, & i = 0, \dots, N, \\ b\, q^N\, Q^{i-N}, & i = N, \dots, 2N. \end{cases} \qquad (24)$$

Знчения постоянных a и b находим из разностного уравнения в узле N (18) и из соотношения (24) в узле N:

$$b = a + 1 = \frac{\varepsilon - \beta h}{\varepsilon + \alpha h}\ \frac{\varepsilon + \frac{H}{2}}{\varepsilon - \frac{h}{2}}. \qquad (25)$$

Итак, решение разностной задачи (17)-(19) опредляется формулами (22)-(25).

3.3. СХЕМА $\varepsilon y_{\bar{x}\hat{x}} + y_{\hat{x}} = 0$

1. Рассмотрим на кусочно-равномерной сетке задачу (17)-(19) в случае $\alpha = \frac{H}{2h}$, $\beta = \frac{h}{2h}$:

$$\varepsilon y_{\bar{x}\hat{x}} + y_{\hat{x}} = 0, \qquad x \in \hat{\omega}, \qquad (26)$$

$$y_0 = 1, \quad y_{2N} = 0. \qquad (27)$$

В силу (22)-(25) ее решение имеет вид:

$$y_i = \frac{v_i - v_{2N}}{v_0 - v_{2N}}, \tag{28}$$

$$v_i = \begin{cases} q^i, & i = 0, \dots, N, \\ q^N Q^{i-N}, & i = N, \dots, 2N. \end{cases} \tag{29}$$

Заметим, что в случае $\frac{1}{2} \le \varepsilon c \ln N$ из (13)-(15) получаем $\sigma = \frac{1}{2}$, h=H, т.е. $\hat{\omega}$ обращается в равномерную сетку, а (29) можно переписать следующим образом:

$$v_i = q^i, \quad i = 0, \dots, 2N. \tag{30}$$

2. Оценим сеточную функцию v_i.

В силу (22),(13)-(15)

$$q = \frac{1 - \frac{h}{2\varepsilon}}{1 + \frac{h}{2\varepsilon}},$$

причем q>0 при достаточно больших N,

т.к. $$\frac{h}{2\varepsilon} = \frac{\sigma}{2\varepsilon N} \le \frac{c \ln N}{2N}. \tag{31}$$

Воспользовавшись разложениями по формуле Тейлора, получаем:

$$\ln q = \ln\left(\frac{1 - \frac{h}{2\varepsilon}}{1 + \frac{h}{2\varepsilon}}\right) = -\frac{h}{\varepsilon} + O\left(\left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^3\right),$$

$$q^i = \exp\{i \ln q\} = \exp\left\{-i\frac{h}{\varepsilon}\right\}\left[1 + i\, O\left(\left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^3\right)\right]. \tag{32}$$

Учтем неравенство

$$i \exp\left\{-i\frac{h}{\varepsilon}\right\} \le \frac{1}{e}\frac{\varepsilon}{h}$$

(которое можно получить, исследовав на максимум функцию $t \exp\{-\alpha t\}$

на $[0,\infty))$ и (31). В результате имеем неравенство

$$|q^i - \exp\{-i\frac{h}{\varepsilon}\}| \le O((\frac{h}{\varepsilon})^2) \le O((\frac{\ln N}{N})^2),$$

которое в дальнейшем будем записывать следующим образом:

$$q^i = \exp\{-i\frac{h}{\varepsilon}\} + O((\frac{\ln N}{N})^2). \qquad (33)$$

В случае $\sigma = \varepsilon c \ln N$ для $i \ge N$ имеем:

$$|q^N Q^{i-N} - \exp\{-\frac{x_i}{\varepsilon}\}| \le q^N + \exp\{-\frac{x_i}{\varepsilon}\} \le$$
$$\le 2\exp\{-\frac{\sigma}{\varepsilon}\} + O((\frac{\ln N}{N})^2) = O(\frac{1}{N^c} + (\frac{\ln N}{N})^2). \quad (34)$$

Если $c \ge 2$, в силу (29),(30),(33),(34), получаем:

$$v_i = \exp\{-\frac{x_i}{\varepsilon}\} + O((\frac{\ln N}{N})^2). \qquad (35)$$

3. Сравним решение разностной задачи (26),(27) с решением задачи (1),(2) $u(x)$ в узлах сетки. В силу (28),(35),(3),

$$y_i = \frac{v_i - v_{2N}}{v_0 - v_{2N}} = \frac{\exp\{\frac{x_i}{\varepsilon}\} - \exp\{-\frac{1}{\varepsilon}\} + O((\frac{\ln N}{N})^2)}{1 - \exp\{-\frac{1}{\varepsilon}\} + O((\frac{\ln N}{N})^2)} =$$
$$= \frac{\exp\{-\frac{x_i}{\varepsilon}\} - \exp\{-\frac{1}{\varepsilon}\}}{1 - \exp\{-\frac{1}{\varepsilon}\}} + O((\frac{\ln N}{N})^2),$$

т.е.

$$y_i = u(x_i) + O((\frac{\ln N}{N})^2). \qquad (36)$$

Итак, при $c \ge 2$ схема (26),(27) сходится с порядком $(\frac{\ln N}{N})^2$ равномерно по ε.

4. В разделе 6 приведены результаты расчетов задачи (1),(2) по схеме (26),(27). Рис. 6.3 и табл. 1 показывают поведение y_i, $u(x_i)$ и $z_i = y_i - u(x_i)$ в узлах сетки. С помощью табл. 2 можно прос-

ледить, как изменяется $z_{max} = \max_i |z_i|$ при изменении ε и N.

Эти результаты подтверждают сделанный выше вывод о сходимости схемы (26),(27).

3.4. СХЕМЫ $\varepsilon y_{\bar{x}\hat{x}} + \frac{1}{2}(y_x + y_{\bar{x}}) = 0$ И $\varepsilon y_{\bar{x}\hat{x}} + \frac{h}{2\hbar} y_x + \frac{H}{2\hbar} y_{\bar{x}} = 0$

Рассмотрим на кусочно-равномерной сетке $\hat{\bar{\omega}}$ задачу (17-(19) в случаях:

II) $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, тогда получаем

$$\varepsilon y_{\bar{x}\hat{x}} + \frac{1}{2}(y_x + y_{\bar{x}}) = 0, \quad x \in \hat{\omega}, \qquad (37)$$

$$y_0 = 1, \quad y_{2N} = 0. \qquad (38)$$

III) $\alpha = \frac{h}{2\hbar}, \quad \beta = \frac{H}{2\hbar}$,

т.е.
$$\varepsilon y_{\bar{x}\hat{x}} + \frac{h}{2\hbar} y_x + \frac{H}{2\hbar} y_{\bar{x}} = 0, \quad x \in \hat{\omega}, \qquad (39)$$

$$y_0 = 1, \quad y_{2N} = 0. \qquad (40)$$

В силу (22)-(25), решения этих задач определяются соотношениями:

$$y_i = \frac{v_i - v_{2N}}{v_0 - v_{2N}}, \qquad (41)$$

$$v_i = \begin{cases} q^i + (b-1)\, q^N, & i = 0, \dots, N, \\ b\, q^N Q^{i-N}, & i = N, \dots, 2N. \end{cases} \qquad (42)$$

где b - следующая постоянная:

II)
$$b = \frac{\varepsilon - \frac{\hbar}{2}}{\varepsilon + \frac{\hbar}{2}} \quad \frac{\varepsilon + \frac{H}{2}}{\varepsilon - \frac{h}{2}},$$

III)
$$b = \frac{\varepsilon^2 - \left(\frac{H}{2}\right)^2}{\varepsilon^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2}.$$

Исследуем случай $\varepsilon \ll \frac{1}{N}$.

В силу (13),(14),(16),

II) $$b = \frac{\varepsilon - \frac{1}{4N}}{\varepsilon + \frac{1}{4N}} \, \frac{\varepsilon + \frac{1-\varepsilon c \ln N}{2N}}{\varepsilon - \frac{\varepsilon c \ln N}{2N}} \approx - \frac{1}{2\varepsilon N},$$

III) $$b = \frac{\varepsilon^2 - \left(\frac{1-\varepsilon c \ln N}{2N}\right)^2}{\varepsilon^2 - \left(\frac{\varepsilon c \ln N}{2N}\right)^2} \approx - \left(\frac{1}{2\varepsilon N}\right)^2,$$

т.е. b - большая по модулю отрицательная постоянная.

Поэтому при $\varepsilon \ll \frac{1}{N}$ решения задач (37),(38) и (39),(40) не имеют ничего общего с решением дифференциальной задачи (1),(2).

Этот факт иллюстрирует рис. 6.4, на котором изображены графики $u(x)$ и y_i - приближенного решения, полученного при расчете схемы, аналогичной схеме II, при $\varepsilon = 10^{-4}$.

4. ГЛАДКОЕ РЕШЕНИЕ

4.1. МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим на отрезке [0,1] задачу

$$\varepsilon u'' + u' = -f, \quad 0 < x < 1, \tag{43}$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \tag{44}$$

$$\varepsilon \in (0, 1].$$

Решение этой задачи можно найти, например, методом вариации постоянных. В результате получим

$$u(x) = -\int_0^x f(s)\left(1 - e^{\frac{s-x}{\varepsilon}}\right)ds + \frac{1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}}{1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}} \cdot \int_0^1 f(s)\left(1 - e^{\frac{s-1}{\varepsilon}}\right)ds. \tag{45}$$