Московский Государственный Университет
имени М.В. Ломоносова

Факультет Вычислительной Математики
и Кибернетики

На правах рукописи

Коптева Наталья Викторовна

УДК 519.63

РАВНОМЕРНЫЕ СЕТОЧНЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ НА СГУЩАЮЩИХСЯ СЕТКАХ

(01.01.07 — вычислительная математика)

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор В.Б. Андреев

Москва — 1996

Содержание

Введение

Большое число задач физики и техники приводит к дифференциальным уравнениям, содержащим малый параметр в виде множителя при старших производных, — так называемым сингулярно возмущенным уравнениям. Структура решений достаточно широкого класса сингулярно возмущенных задач изучена с помощью асимптотических методов [12, 9, 10, 11]. Хорошо известно, что если параметр при старших производных $\varepsilon \to 0$, то решения рассматриваемых в настоящей диссертации сингулярно возмущенных краевых и начально-краевых задач сходятся во внутренних точках области к решению вырожденной задачи ($\varepsilon = 0$). Но поскольку для однозначной разрешимости вырожденного уравнения требуется меньшее число граничных условий, чем для исходного уравнения ($\varepsilon > 0$), то при малых ε неиспользованные в вырожденной задаче граничные условия приводят к образованию в окрестности точек границы, где заданы эти условия, так называемых пограничных слоев, где решение исходной задачи быстро меняется, а его производные не являются ограниченными равномерно по параметру. Иллюстрацией к сказанному может служить модельная задача

$$-\varepsilon u'' - u' = 0, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 1, \quad u(1) = 0, \tag{1}$$

с решением вырожденной задачи $v \equiv 0$ и решением

$$u(x) = \left(\mathrm{e}^{-x/\varepsilon} - \mathrm{e}^{-1/\varepsilon}\right) / \left(1 - \mathrm{e}^{-1/\varepsilon}\right),$$

претерпевающим при малых ε сильные изменения в окрестности точки $x = 0$.

Наличие пограничных слоев с быстроменяющимся решением приводит к тому, что точность классических численных методов, не учитывающих наличие в задаче малого параметра, зависит не только от шага сетки, но и от значения параметра, а точнее от соотношения между шагом сетки и параметром. Поэтому при малых значениях параметра для достижения хорошей точности приходится использовать сетки с очень большим числом узлов. Численное же решение, найденное на не слишком мелкой сетке, как правило, не имеет ничего общего с решением исходной задачи (см., например, [15, 35]).

В связи с этим для сингулярно возмущенных задач разрабатываются специальные, так называемые равномерно по параметру сходящиеся численные методы, точность которых зависит лишь от числа узлов и не зависит от значения параметра. Существование схем, сходящихся на равномерной сетке равномерно по параметру при старших производных, доказано в [16], где для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, вырождающегося в дифференциальное уравнение первого порядка, построена такая разностная схема и установлена ее равномерная по параметру сходимость со скоростью $O(N^{-1})$, где N — число узлов сетки. В дальнейшем построением подобных специальных схем, которые стали называться схемами подгонки, занимались многие авторы (см. [7, 15, 40] и цитированную там литературу). Особенностью методов подгонки является то, что не накладывается никаких ограничений на выбор сетки, а равномерная сходимость достигается за счет специального построения (подгонки) коэффициентов разностного уравнения. К методам подгонки примыкают также проекционно-сеточные методы (методы конечных элементов), использующие в качестве базисных кусочно-экспоненциальные финитные функции, (см., например, [27, 41, 42, 43]), поскольку (например в случае краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений) они приводят к сеточным уравнениям, подобным получаемым в разностных подгоночных методах (о других проекционно-сеточных методах для сингулярно возмущенных задач см., например, [3, 4]).

Другой путь достижения равномерной по малому параметру сходимости предлагается в [5]. Там, в частности, рассматривалось обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, вырождающееся в дифференциальное уравнение нулевого порядка (т. е. в алгебраическое уравнение). Для аппроксимации использовалась классическая трехточечная схема, а неравномерная сетка выбиралась из тех соображений, чтобы погрешность аппроксимации на искомом решении была примерно одинакова в каждом ее узле. Такая сетка в [5] была построена и доказана равномерная сходимость найденного на ней приближенного решения со скоростью $O(N^{-2})$, где N — число узлов сетки. Но, как замечено в [37], для обыкновенного дифференциального уравнения, содержащего член с первой производной, не существует сеток на которых погрешность аппроксимации классических схем была бы равномерно по параметру ограниченной, и поэтому методику построения сгущающихся сеток [5] непосредственно перенести на уравнение с первой производной невозможно.

Первой работой, где для обыкновенного дифференциального уравнения, вырождающегося в дифференциальное уравнение первого порядка, была доказана равномерная по малому параметру сходимость обычной разностной схемы на построенной в этой работе (очень) гладкой неравномерной сгущающейся в окрестности погранслоя сетке является работа [24] (точность исследованной схемы есть $O(N^{-1})$).

В [6] для того же уравнения исследуется схема метода конечных элементов с использованием системы кусочно-линейных в сеточном пограничном слое и кусочно-постоянных вне слоя "тестовых" функций и кусочно-линейных "пробных" функций на сетке типа построенной в [5]. В этой работе установлено (но при существенном ограничении $\varepsilon|\ln\varepsilon| < c/N$!), что полученное приближенное решение имеет точность $O(N^{-2})$.

Первой схемой не подгоночного типа для обсуждаемого уравнения, имеющей равномерную по параметру сходимость почти второго порядка, была схема из работы [2] с оценкой точности $O(N^{-2}\ln^2 N)$. В этой работе была использована предложенная в [37] сгущающаяся в пограничном слое кусочно-равномерная сетка вида

$$\Omega = \{\, x_i \mid \begin{array}{ll} x_i = ih, & i = 0,\dots,n; \\ x_i = x_n + (i-n)H, & i = n+1,\dots,N; \end{array} \tag{2}$$
$$h = \delta/n, \quad H = (1-\delta)/(N-n), \quad \delta = \min(C\varepsilon \ln N, A)\}.$$

Эта сетка сгущающается в окрестности точки $x = 0$ и имеет одинаковые по порядку число n мелких и число $(N-n)$ крупных шагов. Параметр C сетки определяется коэффициентами уравнения, а число $A \in (0,1)$ произвольно.

В самой работе [37] эта сетка и ей подобные были разработаны при построении равномерно по малому параметру сходящихся разностных схем для широкого класса сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с частными производными. Точность построенных в [37] схем не превосходит $O(N^{-1}\ln N)$ и объясняется это используемым там при исследовании сходимости математическим аппаратом (принцип максимума для разностных уравнений). Чтобы удовлетворить принципу максимума, дифференциальные уравнения, содержащие члены с первыми производными аппроксимируются трехточечными разностными схемами с односторонней аппроксимацией первых производных — схемами первого порядка. Соответственно и установленный порядок сходимости таких схем не выше единицы.

Таким образом несмотря на наличие большого количества работ в области численных методов для сингулярно возмущенных задач, некоторые важные вопросы остаются нерассмотренными. В частности, кажется целесообразным исследовать на сетках, подобных (2), классические разностные схемы второго порядка аппроксимации и с помощью более тонких методов (математический аппарат функций Грина [29, 30, 2]) получить равномерные по параметру оценки сходимости этих схем.

Целью данной диссертации является исследование разностных схем с точки зрения их применимости для решения сингулярно возмущенных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, вырождающихся в дифференциальные уравнения первого порядка, начально-краевых задач для параболических уравнений с одной пространственной переменной, и двумерных эллиптических краевых задач и обоснование равномерной относительно малого параметра сходимости этих схем на сгущающихся сетках в смысле сеточной нормы L_∞^h.

Научная новизна диссертации заключается в следующем:

— Для сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, вырождающегося в дифференциальное уравнение первого порядка, установлено, что трехточечная разностная схема с центрально-разностной аппроксимацией первой производной и четырехточечная схема с четырехточечной несимметричной (направленной) аппроксимацией первой производной на сгущающейся в пограничном слое кусочно-равномерной сетке имеют равномерную по малому параметру точность $O(N^{-2}\ln^2 N)$, где N — число узлов сетки.

— Для одномерного нестационарного уравнения конвекции-диффузии установлено, что двухслойная разностная схема с весом $\sigma \geq 0.5$ на сгущающейся в пограничном слое сетке сходится равномерно по малому параметру в смысле сеточной нормы L^h_∞ со скоростью $O(N^{-2}\ln^2 N + (\sigma - 0.5)\tau + \tau^2)$, где N — число узлов сетки по пространству, τ — шаг по времени.

— Для сингулярно возмущенного эллиптического уравнения второго порядка в полосе с условиями периодичности по одной из переменных (y) установлено, что разностная схема с центрально-разностной аппроксимацией первой производной на сгущающейся в пограничном слое сетке сходится равномерно по малому параметру в смысле сеточной нормы L^h_∞ со скоростью $O\big((N^{-2}\ln^2 N + \bar{N}^{-2})\sqrt{\ln \bar{N}}\big)$, где N и $\bar{N}$ — число узлов по направлениям x и y соответственно.

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка цитированной литературы.

Глава 1 посвящена разностным схемам для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром в виде множителя при старшей производной, вырождающихся в дифференциальные уравнения первого порядка. В §1 для задачи

$$\begin{gathered} Lu \equiv -\varepsilon(p(x)u')' - r(x)u' + q(x)u = f(x), \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = g_0, \quad u(1) = g_1, \end{gathered} \tag{3}$$

где

$$p(x) \geq p_0 = \mathrm{const} > 0, \quad r(x) \geq r_0 = \mathrm{const} > 0, \quad q(x) \geq 0, \tag{4}$$

а $\varepsilon \in (0,1]$ — малый параметр, исследуется разностная схема

$$\begin{gathered}\bigl(L^h u^h\bigr)_i \equiv -\varepsilon\bigl(p^h u^h_{\bar{x}}\bigr)_{\hat{x},i} - r^h_i u^h_{\overset{\circ}{x},i} + q^h_i u^h_i = f^h_i, \quad i = 1,\ldots,N-1,\\ u^h_0 = g_0, \quad u^h_N = g_1,\end{gathered} \tag{5}$$

с центрально-разностной аппроксимацией первой производной

$$u^h_{\overset{\circ}{x},i} = \frac{u^h_{i+1} - u^h_{i-1}}{2\hbar_i}.$$

Известно, что если значение параметра ε мало, то численное решение, получаемое по этой схеме на равномерной сетке, имеет вид <пилы> большой амплитуды. Основной результат параграфа —

Т е о р е м а 1.1.1. *Пусть $u(x)$ — решение задачи (3),(4) с достаточно гладкими коэффициентами и правой частью, а u^h — решение (5) на сетке Ω (2). Тогда, если параметр C сетки Ω удовлетворяет условию*

$$C > 2p(0)/r(0), \tag{6}$$

а $N \geq N_0(p(x), r(x))$, то

$$\max_i \bigl|u(x_i) - u^h(x_i)\bigr| = O(N^{-2}\ln^2 N)$$

равномерно по ε.

Для доказательства этой теоремы в явном виде строится функция Грина сеточной задачи (5) на сетке Ω из (2) при $q(x) \equiv 0$ и доказывается ее равномерная по ε ограниченность.

В §2 главы 1 для обыкновенного дифференциального уравнения с <дивиргентным> видом члена с первой производной

$$Lu \equiv -\varepsilon(p(x)u')' - (r(x)u)' = f(x), \tag{7}$$

коэффициенты которого удовлетворяют (4), исследуются несимметричные четырехточечные схемы вида

$$(\bar{L}^h \bar{u}^h)_i \equiv -\varepsilon\big(p^h \bar{u}^h_{\bar{x}}\big)_{\hat{x},i} - \big(r^h \bar{u}^h\big)_{\mathring{x},i} + \big(\alpha_i h_i \hbar_i (r^h \bar{u}^h)_{\bar{x}\hat{x}}\big)_{\hat{x},i} = f^h_i.$$

Эти схемы отличаются от схемы с центральной разностью дополнительным членом с третьей разностной производной, коэффициент при котором α_i выбирается таким образом, чтобы схемы были монотонны в смысле неотрицательности корней характеристического многочлена:
либо

$$\alpha_i = 0.5,$$

либо

$$\alpha_i = \max\left\{0;\ 0.5 - \frac{\varepsilon p^h_i}{h_i r^h_{i-1}}\right\}.$$

Установлено (теоремы 1.2.2 и 1.2.6, аналогичные теореме 1.1.1), что на сгущающейся в пограничном слое кусочно-равномерной сетке Ω из (2), параметр C которой удовлетворяет условию (6), обе исследуемые схемы сходятся равномерно по ε со скоростью $O(N^{-2}\ln^2 N)$, где N — число узлов сетки.

Поскольку $\bar{L}^h$ не дает сколько-нибудь разумного сопряженного оператора, при $\alpha = 0.5$ он модифицируется в узлах $i = 1, n-1, n$ в оператор $\tilde{L}^h$ таким образом, чтобы с одной стороны сохранялось свойство равномерной по параметру сходимости (теорема 1.2.4, аналогичная теореме 1.1.1), и в то же время подобно тому, как при постоянных коэффициентах и замене $x' = 1 - x$ сопряженный дифференциальному оператору L из (7) оператор L^* обращается в L, сопряженный разностному оператору $\tilde{L}^h$ оператор $\tilde{L}^{h*}$ обращался в $\tilde{L}^h$. Тогда для схемы с оператором $\tilde{L}^{h*}$ имеет место теорема, аналогичная теореме 1.1.1 (замечание 1.2.1).

Глава 2 посвящена разностным схемам для сингулярно возмущенных параболических уравнений, вырождающихся при $\varepsilon = 0$ в гиперболические уравнения первого порядка. В §1 рассматривается начально-краевая задача для одномерного нестационарного уравнения конвекции-диффузии

$$\begin{gathered} \dot{u} + Lu = f(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le T, \\ u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(1,t) = \mu_2(t), \quad 0 < t \le T, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1, \end{gathered} \tag{8}$$

где L — стационарный дифференциальный оператор (3),(4) с малым параметром $\varepsilon \in (0,1]$ при старшей производной. Предполагается, что в точках $(x = 0, t = 0)$ и $(x = 1, t = 0)$ выполняются условия согласования [22], обеспечивающие достаточную гладкость решения. Задача (8) аппроксимируется на сетке $\Omega \times \omega_\tau$ (Ω — кусочно-равномерная сетка (2), ω_τ — равномерная сетка по времени с шагом $\tau = T/K$) двухслойной разностной схемой с весами

$$
\begin{gathered}
\left[u_t^h + L^h u^{h,\sigma}\right]_i^j = f_i^{h,j}, \quad i = 1, \ldots, N-1, \quad j = 0, \ldots, K-1, \\
u_0^{h,j} = \mu_1(t_j), \quad u_N^{h,j} = \mu_2(t_j), \quad j = 0, \ldots, K, \\
u_i^{h,0} = \varphi_i^h, \quad i = 0, \ldots, N,
\end{gathered}
\tag{9}
$$

где $\sigma \in [0.5, 1]$ — параметр схемы, а L^h — трехточечный разностный оператор (5) с аппроксимацией первой производной по пространству центральным разностным отношением. Основной результат параграфа — теорема 2.1.1, согласно которой на сгущающейся в пограничном слое сетке $\Omega \times \omega_\tau$, параметр C которой удовлетворяет условию (6), схема (9) с начальным условием

$$
L_\varepsilon^h \varphi^h = \left(L_\varepsilon \varphi\right)(x_i), \quad i = 1, \ldots, N-1, \quad \varphi_0^h = \varphi(0), \quad \varphi_N^h = \varphi(1),
$$

имеет при $\sigma \geq 0.5$ равномерную по параметру точность $O(N^{-2} \ln^2 N + (\sigma - 0.5)\tau + \tau^2)$ в смысле сеточной нормы L_∞^h, где σ — параметр схемы, N — число узлов сетки по пространству, τ — шаг по времени. Для доказательства теоремы 1) устанавливается устойчивость схемы с весами при $\sigma \geq 0.5$ в сеточной норме L_2^h (теорема 2.1.2); 2) используется доказанная в §1 главы 1 ограниченность функции Грина стационарного оператора L^h из (5) (теорема 1.1.3).

Глава 3 посвящена разностным схемам для сингулярно возмущенных эллиптических уравнений. В §1 для кусочно-линейных непрерывных функций, заданных на триангуляции $\mathcal{T}_h$ области $\Omega \subset R^2$ с кусочно-гладкой границей, установлено (теорема 3.1.1), что их нормы в $C(\bar{\Omega})$ ограничены нормами в $W_2^1(\Omega)$, умноженными на $c|\ln h|^{1/2}$, где h — диаметр наименьшего из треугольников $\tau \in \mathcal{T}_h$, а $c = c(\Omega)$ — некоторая постоянная. Квазиравномерность триангуляции $\mathcal{T}_h$ не предполагается. Этот результат используется в §2 при исследовании разностной схемы с центрально-разностной аппроксимацией первой производной для сингулярно возмущенного эллиптического уравнения второго порядка в полосе $[0,1] \times (-\infty, \infty)$ с условиями периодичности по переменной y. Показано (теорема 3.2.1), что на сгущающейся в пограничном слое кусочно-равномерной сетке исследуемая схема сходится равномерно по малому параметру в смысле сеточной нормы L_∞^h со скоростью $O\left((N^{-2}\ln^2 N + \bar{N}^{-2})\sqrt{\ln \bar{N}}\right)$, где N и $\bar{N}$ — число узлов по направлениям x и y соответственно.

Точность исследованных схем иллюстрируется численными результатами и рисунками.

В диссертации использована двухпозиционная нумерация утверждений, формул и таблиц, при этом первое число указывает на номер параграфа. При ссылке на формулу или утверждение из другой главы используется трехпозиционная нумерация, при этом первое число указывает на номер главы, а второе на номер параграфа.

Глава 1.

Разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром при старшей производной

§1. Разностная схема с аппроксимацией первой производной центральным разностным отношением

В этом параграфе для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, содержащего малый параметр в виде множителя при старшей производной, исследуется классическая разностная схема, использующая для аппроксимации первой производной центральное разностное отношение. Путем детального анализа функции Грина сеточной задачи установлено, что на сгущающейся в пограничном слое кусочно-равномерной сетке исследуемая схема разрешима и имеет равномерную по малому параметру точность $O(N^{-2}\ln^2 N)$, где N — число узлов сетки.

Для сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка рассмотрим простейшую двухточечную краевую задачу

$$
\begin{gathered}
Lu \equiv -\varepsilon(p(x)u')' - r(x)u' + q(x)u = f(x), \quad 0 < x < 1, \\
u(0) = g_0, \quad u(1) = g_1,
\end{gathered} \tag{1.1}
$$

где

$$
p(x) \geq p_0 = \mathrm{const} > 0, \quad r(x) \geq r_0 = \mathrm{const} > 0, \quad q(x) \geq 0, \tag{1.2}
$$

а $\varepsilon \in (0, 1]$ — малый параметр. Хорошо известно [11], что при $\varepsilon \to 0$ решение этой задачи сходится на полуинтервале $0 < x \leq 1$ к решению вырожденной задачи

$$
-r(x)v' + q(x)v = f(x), \quad v(1) = g_1,
$$

а при малых ε неиспользованное в вырожденной задаче граничное условие приводит к образованию в окрестности точки $x = 0$ так называемого пограничного слоя, где решение $u(x)$ исходной задачи (1.1) претерпевает сильные изменения.

Пусть

$$
\bar{\omega} = \{\, x_i \,|\, 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N = 1 \,\} \tag{1.3}
$$

— произвольная неравномерная сетка на $[0, 1]$. Обозначим, как обычно,

$$
\begin{gathered}
h_i = x_i - x_{i-1}, \quad \hbar_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}, \quad v_{x,i} = \frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1}}, \\
v_{\bar{x},i} = \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i}, \quad v_{\hat{x},i} = \frac{v_{i+1} - v_i}{\hbar_i}, \quad v_{\check{x},i} = \frac{v_i - v_{i-1}}{\hbar_i}
\end{gathered} \tag{1.4}
$$

и построим на сетке $\bar{\omega}$ классическую аппроксимацию задачи (1.1)

$$\begin{gathered}
-\varepsilon\big(p^h u^h_{\bar{x}}\big)_{\hat{x},i} - r^h_i\big(\sigma u^h_{\hat{x}} + (1-\sigma)u^h_{\check{x}}\big)_i + q^h_i u^h_i = f^h_i, \quad i = 1,\dots,N-1, \\
u^h_0 = g_0, \quad u^h_N = g_1,
\end{gathered} \tag{1.5}$$

где $\sigma = \mathrm{const}$ — параметр схемы, а

$$p^h_i = p(x_i - h_i/2), \quad r^h_i = r(x_i), \quad q^h_i = q(x_i), \quad f^h_i = f(x_i). \tag{1.6}$$

Известно (см., например, [29]), что если сетка $\bar{\omega}$ является равномерной, т. е. все $h_i = h = 1/N$, то на гладких решениях уравнения (1.1) разностная схема (1.5) при $\sigma = 1/2$ имеет погрешность аппроксимации $O(h^2)$, в то время как при $\sigma = 1$ ее погрешность есть лишь $O(h)$. Однако при $\sigma = 1$ на произвольной сетке при малых ε схема (1.5) монотонна, т. е. обладает принципом максимума [29], а при $\sigma = 1/2$ принцип максимума для (1.5) имеет место лишь при условии, что параметр ε не слишком мал по сравнению с h_i. Отсутствие принципа максимума у схемы (1.5) при $\sigma = 1/2$ приводит к тому, что ее решение приобретает <пилообразный> вид. В силу этого обстоятельства указанная схема в среде вычислителей-прикладников пользуется дурной славой. Следует однако отметить, что если при малых ε сетка $\bar{\omega}$ не приспособлена специальным образом к решению задачи (1.1), то схема (1.5) не обладает равномерной по ε сходимостью ни при $\sigma = 1/2$, ни при $\sigma = 1$. И тем не менее некоторым утешительным доводом в пользу схемы (1.5) с $\sigma = 1$ может служить установленный в [40] факт, что вне погранслоя на равномерной сетке $\bar{\omega}$ она сходится со скоростью

$O(h)$. При $\sigma = 1/2$ схема (1.5) этим свойством не обладает, в чем можно убедиться на простых примерах.

Равномерная по ε сходимость схемы (1.5) на всей сетке впервые была исследована в [37], где была введена кусочно-равномерная сетка

$$\begin{aligned} \Omega = \{\, x_i \mid \ & x_i = ih, && i = 1, \ldots, n; \\ & x_i = x_n + (i-n)H, && i = n+1, \ldots, N-1; \\ h = \delta/n, \quad & H = (1-\delta)/(N-n), && \delta = \min(C\varepsilon \ln N, A), \\ & N/n = B = O(1), && 0 < A < 1 \,\}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

сгущающаяся в пограничном слое, и доказано, что схема (1.5) при $\sigma = 1$ на сетке (1.7) при $C > p(0)/r(0)$ равномерно по ε сходится в смысле сеточной нормы $C(\Omega)$ со скоростью $O(N^{-1} \ln^2 N)$. В [2] была построена модификация монотонной схемы Самарского [29] и на сетке (1.7) при $C > 2p(0)/r(0)$ доказана ее равномерная по ε сходимость со скоростью $O(N^{-2} \ln^2 N)$ в той же норме.

Нами здесь будет исследована на той же сетке (1.7) схема (1.5) при $\sigma = 1/2$. Перепишем ее в виде

$$\begin{gathered} \big(L^h u^h\big)_i \equiv -\varepsilon \big(p^h u^h_{\bar{x}}\big)_{\hat{x},i} - r^h_i u^h_{\overset{\circ}{x},i} + q^h_i u^h_i = f^h_i, \quad i = 1, \ldots, N-1, \\ u^h_0 = g_0, \quad u^h_N = g_1, \end{gathered} \tag{1.8}$$

где

$$v_{\overset{\circ}{x},i} = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2\hbar_i} \tag{1.9}$$

— центральное разностное отношение. Имеет место

Т е о р е м а 1.1. *Пусть $u(x)$ — решение задачи (1.1),(1.2) с достаточно гладкими коэффициентами и правой частью, а u^h — решение (1.8),(1.6) на сетке Ω (1.7). Тогда, если параметр C сетки Ω удовлетворяет условию*

$$C > 2p(0)/r(0), \tag{1.10}$$

а $N \geq N_0(p(x), r(x))$, то

$$\max_i \left|u(x_i) - u^h(x_i)\right| = O(N^{-2} \ln^2 N) \tag{1.11}$$

равномерно по ε.

Доказательству этой теоремы и посвящен настоящий параграф.

1.1. Сеточная функция Грина

Ключом к доказательству теоремы 1.1 является доказательство равномерной по ε ограниченности функции Грина $G(x_i, \xi_j)$ задачи (1.8) на сетке Ω (1.7) при $q(x) \equiv 0$, оператор которой будем обозначать через L_0^h. Как функция x_i при фиксированном ξ_j функция Грина определяется соотношениями

$$L_0^h G(x_i, \xi_j) = \delta^h(x_i, \xi_j), \quad x_i \in \Omega, \quad \xi_j \in \Omega, \tag{1.12}$$

$$G(0, \xi_j) = G(1, \xi_j) = 0, \quad \xi_j \in \Omega, \tag{1.13}$$

где

$$\delta^h(x_i, \xi_j) = \begin{cases} \hbar_i^{-1} & \text{при } x_i = \xi_j, \\ 0 & \text{при } x_i \neq \xi_j \end{cases}$$

— сеточный аналог дельта-функции Дирака.

Для сеточных функций $u(x_j)$ и $v(x_j)$, определенных на $\bar{\omega}$ и обращающихся в нуль при $i = 0$ и $i = N$, введем скалярное произведение

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i \hbar_i \tag{1.14}$$

и нормы

$$\begin{gathered} ||v||_{L_2^h(\bar{\omega})} = ||v|| = \sqrt{(v, v)}, \\ ||v||_{L_1^h(\bar{\omega})} = (|v|, 1), \\ ||v||_{L_\infty^h(\bar{\omega})} = \max_i |v_i|, \end{gathered} \tag{1.15}$$

которые, очевидно, связаны неравенствами

$$||v||_{L_1^h(\bar{\omega})} \leq ||v||_{L_2^h(\bar{\omega})} \leq ||v||_{L_\infty^h(\bar{\omega})}. \tag{1.16}$$

Тогда, если $v^h(x_i)$ есть решение задачи (1.8) с однородными граничными условиями $v^h(0) = v^h(1) = 0$, то

$$v^h(x_i) = (G(x_i, \xi_j), f^h(\xi_j)). \tag{1.17}$$

Обозначим через L_0^{h*} сеточный оператор, сопряженный к L_0^h из (1.8) в смысле скалярного произведения (1.14), т. е.

$$(L_0^h u, v) = (u, L_0^{h*} v).$$

Легко проверить, что

$$\left(L_0^{h*} v\right)_j \equiv -\varepsilon \left(p^h v_{\bar{\xi}}\right)_{\hat{\xi}, j} + \left(r^h v\right)_{\overset{\circ}{\xi}, j}. \tag{1.18}$$

Оператор L_0^{h*} позволяет описать функцию $G(x_i,\xi_j)$ как функцию ξ_j при фиксированном x_i. Именно

$$\begin{gathered} L_0^{h*}G(x_i,\xi_j)=\delta^h(\xi_j,x_i), \quad \xi_j\in\Omega, \quad x_i\in\Omega, \\ G(x_i,0)=G(x_i,1)=0, \quad x_i\in\Omega. \end{gathered} \tag{1.19}$$

Построим функцию $G(x_i,\xi_j)$ в явном виде. Для этого введем в рассмотрение функцию $\alpha(x_i)=\alpha_i$, которая является решением следующей сеточной задачи Коши:

$$L_0^h\alpha_i=0, \quad x_i\in\Omega, \quad \alpha_0=0, \quad \left(\varepsilon p_1^h+\frac{h_1}{2}r_0^h\right)\alpha_{x,0}=1. \tag{1.20}$$

Полагая здесь

$$\varepsilon\big(p^h\alpha_{\bar{x}}\big)_i=w_i, \quad i=1,\ldots,N \tag{1.21}$$

и принимая во внимание (1.8), найдем, что w_i удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$w_{i+1}-w_i+\frac{r_i^h}{2}\left(\frac{h_{i+1}}{\varepsilon p_{i+1}^h}w_{i+1}+\frac{h_i}{\varepsilon p_i^h}w_i\right)=0. \tag{1.22}$$

Отсюда

$$w_{i+1}=q_iw_i, \tag{1.23}$$

где

$$q_i=\left(1-\frac{r_i^hh_i}{2\varepsilon p_i^h}\right)\left(1+\frac{r_i^hh_{i+1}}{2\varepsilon p_{i+1}^h}\right)^{-1}, \quad i=1,\ldots,N-1, \tag{1.24}$$

и следовательно

$$w_i=w_1\prod_{k=1}^{i-1}q_k, \quad i=1,\ldots,N.$$

Доопределим w_i и q_i при $i = 0$, полагая в (1.22) и (1.24) $i = 0$ и $h_0 = 0$. Тогда, принимая во внимание второе начальное условие (1.20), будем иметь

$$w_i = \prod_{k=0}^{i-1} q_k, \quad i = 0, \dots, N. \tag{1.25}$$

Из (1.21) с учетом первого начального условия (1.20) находим

$$\alpha_i = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{l=1}^{i} \frac{w_l}{p_l^h} h_l, \quad i = 0, \dots, N. \tag{1.26}$$

Приступим к построению $G(x_i, \xi_j)$. Поскольку наряду с α_i решением уравнения (1.20) является и функция $\bar{\alpha}_i = \text{const}$, то функцию Грина можно искать в виде

$$G(x_i, \xi_j) = c \begin{cases} \mathcal{B}_j \alpha_i, & i \le j, \\ (\alpha_N - \alpha_i)\beta_j, & i \ge j. \end{cases}$$

Эта функция удовлетворяет уравнению (1.12) при $x_i \ne \xi_j$ и граничным условиям (1.13). Из требования однозначности представления при $i = j$ имеем $\mathcal{B}_j \alpha_j = (\alpha_N - \alpha_j)\beta_j$ и следовательно

$$G(x_i, \xi_j) = c \begin{cases} \alpha_i(\alpha_N - \alpha_j)\beta_j/\alpha_j, & i \le j, \\ (\alpha_N - \alpha_i)\beta_j, & i \ge j. \end{cases} \tag{1.27}$$

Далее, функция $G(x_i, \xi_j)$ по переменной ξ_j удовлетворяет уравнению (1.19) и следовательно β_j такова, что вместе с $\bar{\beta}_j = \beta_j/\alpha_j$ удовлетворяет уравнению

$$L_0^{h*} v_j = 0, \quad \xi_j \in \Omega. \tag{1.28}$$

Поскольку, к тому же, $G(x_i, 0)$ должна обращаться в нуль, а $\beta_0 = \bar{\beta}_0 \alpha_0 = 0$, то пусть

$$L_0^{h*} \beta_j = 0, \quad \xi_j \in \Omega, \quad \beta_0 = 0, \quad \varepsilon p_1^h \beta_{\xi,0} - \frac{h_1}{2} \left(r^h \beta \right)_{\xi,0} = 1. \quad (1.29)$$

Найдем β_j. Из (1.28) и (1.18) следует, что

$$\varepsilon p_{j+1}^h v_{\bar{\xi},j+1} - \left(r_j^h v_j + r_{j+1}^h v_{j+1} \right) /2 = \text{const}, \quad j = 0, \ldots, N-1. \quad (1.30)$$

Если $\text{const} = 0$, то

$$\left(1 - \frac{r_{j+1}^h h_{j+1}}{2\varepsilon p_{j+1}^h} \right) v_{j+1} = \left(1 + \frac{r_j^h h_{j+1}}{2\varepsilon p_{j+1}^h} \right) v_j$$

или с учетом (1.24)

$$\left[v_{j+1} \left(1 - \frac{r_{j+1}^h h_{j+1}}{2\varepsilon p_{j+1}^h} \right) \right]^{-1} = q_j \left[v_j \left(1 - \frac{r_j^h h_j}{2\varepsilon p_j^h} \right) \right]^{-1}.$$

Сравнивая это соотношение с (1.23), заключаем, что

$$v_j = c \left[w_j \left(1 - \frac{r_j^h h_j}{2\varepsilon p_j^h} \right) \right]^{-1}, \quad j = 0, 1, \ldots, N, \quad (1.31)$$

где w_j определяется (1.25). Отсюда и из (1.25) следует, что v_j, являясь решением уравнения (1.28), не может претендовать на роль β_j — решения задачи (1.29), ибо требование $v_0 = 0$ приводит к тождественно нулевому решению. Тем самым, для v_j подходит роль $\bar{\beta}_j$ и следовательно можно положить

$$\beta_j = v_j \alpha_j. \quad (1.32)$$

Подставляя теперь (1.32) во второе начальное условие (1.29) и принимая во внимание (1.26) и (1.31), находим, что это условие будет выполнено, если в (1.31) положить $c = 1$.

Осталось определить постоянную c в (1.27). Для этого следует подставить (1.27) при найденной β_j в (1.12) и положить там $i = j$, что приведет к значению $c = {\alpha_N}^{-1}$. Итак, функция Грина $G(x_i, \xi_j)$ полностью определена и может быть записана в виде

$$G(x_i, \xi_j) = \left[w_j \left(1 - \frac{r_j^h h_j}{2\varepsilon p_j^h} \right) \alpha_N \right]^{-1} \begin{cases} \alpha_i(\alpha_N - \alpha_j), & i \le j, \\ (\alpha_N - \alpha_i)\alpha_j, & i \ge j. \end{cases} \tag{1.33}$$

З а м е ч а н и е 1.1. Разумеется, к соотношению (1.32) можно было бы прийти без апелляции к функции Грина просто решая уравнение (1.30) при $\mathrm{const} \ne 0$. Решение этого уравнения можно найти в виде (1.31) при $c = c_j$ методом вариации постоянной.

Следует отметить, что представление функции Грина в виде (1.33) вполне корректно только если $[1 - r_j^h h_j/(2\varepsilon p_j^h)] \ne 0$ ни при каком $\xi_j \in \Omega$. В противном случае требуются дополнительные пояснения. Сделаем их.

Для $i \le j$ введем в рассмотрение функции

$$W_{i,j} = \frac{w_j}{w_i} = \prod_{k=i}^{j-1} q_k \tag{1.34}$$

и

$$A_{i,j} = \frac{\alpha_j - \alpha_{i-1}}{w_i} = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{l=i}^{j} \frac{W_{il}}{p_l^h} h_l, \tag{1.35}$$

где w_i и α_i задаются соотношениями (1.25) и (1.26) соответственно. Очевидно, что при $i \le m < j$

$$W_{i,j} = W_{i,m}W_{m,j} = W_{i,m}q_m W_{m+1,j}, \tag{1.36}$$

а

$$A_{i,j} = A_{i,m} + W_{i,m+1}A_{m+1,j}. \tag{1.37}$$

Перепишем $G(x_i, \xi_j)$ из (1.33) в терминах $W_{i,j}$ и $A_{i,j}$. Поскольку в силу (1.24)

$$w_j \left(1 - \frac{r_j^h h_j}{2\varepsilon p_j^h}\right) = w_{j+1} \left(1 + \frac{r_j^h h_{j+1}}{2\varepsilon p_{j+1}^h}\right),$$

то подставляя это соотношение в знаменатель (1.33) и принимая во внимание (1.35) и (1.34), будем иметь

$$G(x_i, \xi_j) = \left[\left(1 + \frac{r_j^h h_{j+1}}{2\varepsilon p_{j+1}^h}\right)\alpha_N\right]^{-1} \begin{cases} \alpha_i A_{j+1,N}, & i \le j, \\ \alpha_j A_{i+1,N} W_{j+1,i+1}, & i \ge j. \end{cases} \tag{1.38}$$

Это представление $G(x_i, \xi_j)$ корректно вне зависимости от того, обращаются в нуль какие-либо q_j или нет. В дальнейшем мы будем использовать оба представления функции Грина (1.33) и (1.38).

1.2. Вспомогательные оценки

Прежде чем переходить к непосредственной оценке функции $G(x_i, \xi_j)$ установим некоторые вспомогательные оценки. Поскольку коэффициенты $p(x)$ и $r(x)$ уравнения (1.1) предполагаются непрерывными на $[0, 1]$, то они там ограничены. Пусть

$$p(x) \le \bar{p}, \quad r(x) \le \bar{r}. \tag{1.39}$$

Л е м м а 1.1. *Если коэффициенты $p(x)$ и $r(x)$ уравнения (1.1) подчинены неравенствам (1.2), (1.39), $q(x) \equiv 0$, а для числа узлов сетки Ω выполнено условие*

$$N > N_1, \quad \text{где} \quad N_1 \geq \max\left\{3, \frac{\bar{r}}{2p_0} BC \ln N_1\right\}, \tag{1.40}$$

то при $i = 1, \ldots, n$ решение задачи (1.20) монотонно возрастает и для него справедливы оценки

$$\frac{p_0}{\bar{p}\bar{r}}(1 - \mathring{q}^{\,i}) \leq \alpha_i \leq \frac{\bar{p}}{p_0 r_0}(1 - \tilde{q}^i), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.41}$$

где

$$\mathring{q} = \left(1 - \frac{h\bar{r}}{2\varepsilon p_0}\right)\left(1 + \frac{h\bar{r}}{2\varepsilon p_0}\right)^{-1}, \ \tilde{q} = \left(1 - \frac{hr_0}{2\varepsilon\bar{p}}\right)\left(1 + \frac{hr_0}{2\varepsilon\bar{p}}\right)^{-1}. \tag{1.42}$$

При этом

$$0 < \frac{\mathring{q}^{\,i-1}}{1 + h\bar{r}/(2\varepsilon p_0)} \leq w_i \leq \frac{\tilde{q}^{i-1}}{1 + hr_0/(2\varepsilon\bar{p})}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.43}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем сначала, что при сделанных предположениях

$$\mathring{q} > 0. \tag{1.44}$$

Из (1.42) находим, что (1.44) будет выполнено, если

$$h < \frac{2\varepsilon p_0}{\bar{r}}. \tag{1.45}$$

Оценим h. По определению (1.7) $h = \delta/n = B\delta/N$. Если $C\varepsilon \ln N < A$, то в силу (1.7) $\delta = C\varepsilon \ln N$, а $h = (BC\varepsilon \ln N)/N$. Поскольку функция $N^{-1}\ln N$ при $N \geq 3$ является убывающей, то с учетом (1.40)

$$h < \frac{BC\varepsilon \ln N_1}{N_1} \leq \frac{2\varepsilon p_0}{\bar{r}}.$$

Если же $C\varepsilon \ln N \geq A$, то $\delta = A$,

$$h = \frac{AB}{N} \leq \frac{BC\varepsilon \ln N}{N}$$

и снова с учетом (1.40) приходим к (1.45). Положительность $\mathring{q}$ установлена.

Оценивая q_k из (1.24) с учетом (1.6), (1.2) и (1.39) и принимая во внимание (1.42) и (1.44), будем иметь

$$0 < \mathring{q} \leq q_i \leq \tilde{q} < 1, \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{1.46}$$

Использование этих неравенств при оценке (1.25) приводит к (1.43). В силу (1.21) монотонное возрастание $\alpha(x_i)$ есть следствие уже доказанной положительности w_i. Наконец, оценки (1.41) следуют из (1.26) и (1.43). Лемма доказана.

Л е м м а 1.2. *Пусть коэффициенты* $p(x)$ *и* $r(x)$ *уравнения (1.1) суть непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям (1.2), (1.39) и*

$$|p'(x)| \leq c_1, \quad |r'(x)| \leq c_1, \tag{1.47}$$

а $q(x) \equiv 0$. *Если к тому же число узлов сетки* Ω *достаточно велико, т. е.*

$$N \geq N_2 = N_2(p, r), \tag{1.48}$$

(см. (1.64), (1.61)), то при $j \geq i \geq n+1$

$$|W_{ij}| \leq \frac{\bar{p}}{p_0}, \tag{1.49}$$

$$|A_{ij}| \leq \frac{\bar{p}}{p_0 r_0}\left(1 + \frac{Hr_0}{2\varepsilon\bar{p}}\right) c_2, \tag{1.50}$$

где $1 \leq c_2 = c_2(p,r)$ *(см. (1.67)).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Когда k пробегает значения от $i \geq n+1$ до $j-1$, поведение функции q_k из (1.24) определяется одним из следующих сценариев: 1^0. q_k остается положительной при всех k; 2^0. q_k остается отрицательной при всех k; 3^0. q_k меняет знак или обращается в нуль. Рассмотрим эти сценарии по отдельности.

1^0. $q_k > 0$ при $i \leq k \leq j-1$. Поскольку $i \geq n+1$, то

$$\begin{aligned} 0 < q_k = \left(1 - \frac{Hr_k^h}{2\varepsilon p_k^h}\right)\left(1 + \frac{Hr_k^h}{2\varepsilon p_{k+1}^h}\right)^{-1} \leq \\ \leq \left(1 - \frac{Hr_0}{2\varepsilon\bar{p}}\right)\left(1 + \frac{Hr_0}{2\varepsilon\bar{p}}\right)^{-1} \equiv Q < 1, \end{aligned} \tag{1.51}$$

и следовательно

$$0 < W_{ij} \leq Q^{j-i} \leq 1,$$

что не противоречит (1.49). Далее,

$$0 \leq A_{ij} < \frac{H}{\varepsilon p_0}\sum_{l=i}^{\infty} Q^{l-i} = \frac{H}{\varepsilon p_0}\frac{1}{1-Q} = \frac{\bar{p}}{p_0 r_0}\left(1 + \frac{Hr_0}{2\varepsilon\bar{p}}\right), \tag{1.52}$$

что совпадает с (1.50) при $c_2 = 1$.

2^0. $q_k < 0$ при $i \leq k \leq j-1$. Поскольку при любых положительных a и b дробь $(-1+a)/(1+b) > -1$, то

$$0 > q_k = \frac{p_{k+1}^h}{p_k^h}\left(-1 + \frac{2\varepsilon p_k^h}{Hr_k^h}\right)\left(1 + \frac{2\varepsilon p_{k+1}^h}{Hr_k^h}\right)^{-1} \geq -\frac{p_{k+1}^h}{p_k^h} \tag{1.53}$$

и следовательно
$$|W_{ij}| \le \frac{p_j^h}{p_i^h} \le \frac{\bar{p}}{p_0},$$
что совпадает с (1.49). Далее, с учетом (1.34), (1.35) находим, что
$$A_{ij} = \frac{H}{\varepsilon}\left[\frac{1}{p_i^h} + \frac{q_i}{p_{i+1}^h} + \cdots + \frac{\prod_{k=i}^{j-1} q_k}{p_j^h}\right] = \tag{1.54}$$
$$= \frac{H}{\varepsilon}\left[\frac{1}{p_{i+1}^h}\left(\frac{p_{i+1}^h}{p_i^h} + q_i\right) + \frac{q_i q_{i+1}}{p_{i+3}^h}\left(\frac{p_{i+3}^h}{p_{i+2}^h} + q_{i+2}\right) + \right.$$
$$\left. + \cdots + \frac{\prod_{k=i}^{j-2} q_k}{p_j^h}\left(\frac{1-(-1)^{j-i}}{2}\frac{p_j^h}{p_{j-1}^h} + q_{j-1}\right)\right].$$

Если $(j-i)$ — нечетное число, то в силу (1.53) выражения в каждой круглой скобке этой суммы положительны. Положительны и множители при них и следовательно
$$A_{ij} > 0. \tag{1.55}$$

Если же $(j-i)$ — четное число, то изменяется лишь последнее слагаемое, в котором величина, стоящая в круглой скобке, будет отрицательной. Но отрицательным будет и множитель при ней, и снова верно (1.55).

Перенесем первое слагаемое в представлении A_{ij} (1.54) в левую часть, а оставшиеся слагаемые снова сгруппируем парами
$$A_{ij} - \frac{H}{\varepsilon}\frac{1}{p_i^h} = \frac{H}{\varepsilon}\left[\frac{q_i}{p_{i+2}^h}\left(\frac{p_{i+2}^h}{p_{i+1}^h} + q_{i+1}\right) + \cdots\right].$$
Те же рассуждения приводят к заключению, что
$$A_{ij} - \frac{H}{\varepsilon}\frac{1}{p_i^h} < 0.$$

Объединяя это неравенство с (1.55), получим

$$|A_{ij}| < \frac{H}{\varepsilon}\frac{1}{p_i^h} \le \frac{H}{\varepsilon}\frac{1}{p_0}, \tag{1.56}$$

что не противоречит (1.50) при $c_2 = 2$.

3^0. q_k меняет знак. Пусть натуральное число m, расположенное между i и $j-1$, таково, что все $q_{m+1}, \dots, q_{j-1}$ одного знака, а q_m — другого или нуль. Тогда для q_k при $m+1 \le k \le j-1$ имеет место один из уже рассмотренных сценариев 1^0 или 2^0, при реализации которых утверждения леммы доказаны. Поэтому в силу (1.49)

$$|W_{m+1,j}| = |q_{m+1} \cdots q_{j-1}| \le \frac{\bar{p}}{p_0}.$$

Отсюда с учетом (1.36)

$$|W_{ij}| = |W_{im} q_m W_{m+1,j}| \le |W_{im}| \frac{\bar{p}}{p_0} |q_m|\,. \tag{1.57}$$

Если $q_m = 0$, то $W_{ij} = 0$ и оценка (1.49) очевидна. Поэтому пусть $q_m \ne 0$ и $q_m q_{m+1} < 0$.

Введем в рассмотрение функцию

$$\tilde{q}(x) = \left[1 - \frac{Hr(x)}{2\varepsilon p(x - H/2)}\right]\left[1 + \frac{Hr(x)}{2\varepsilon p(x + H/2)}\right]^{-1}. \tag{1.58}$$

Принимая во внимание (1.6) и (1.24), заключаем, что $q_m = \tilde{q}(x_m)$ равно как и $q_{m+1} = \tilde{q}(x_{m+1})$. Поскольку по предположению q_m и q_{m+1} имеют разные знаки, то функция $\tilde{q}(x)$, будучи непрерывной, обращается в нуль в точке $\xi \in (x_m, x_{m+1})$. Отсюда находим, что

$$\frac{H}{\varepsilon} = 2\frac{p(\xi - H/2)}{r(\xi)} \le \frac{2\bar{p}}{r_0} \tag{1.59}$$

и

$$q_m = \tilde{q}(\xi) + (x_m - \xi)\tilde{q}'(\eta) = (x_m - \xi)\tilde{q}'(\eta), \quad \eta \in (x_m, \xi). \quad (1.60)$$

Оценим $\tilde{q}\,'(x)$. Из (1.58) следует, что

$$\tilde{q}\,'(x) =$$
$$= -\frac{H}{2\varepsilon}\left[1 + \frac{Hr(x)}{2\varepsilon p(x+H/2)}\right]^{-1}\left[\left(\frac{r(x)}{p(x-H/2)}\right)' + \left(\frac{r(x)}{p(x+H/2)}\right)'\tilde{q}(x)\right].$$

Для первых двух сомножителей имеем

$$\frac{H}{2\varepsilon}\left[1 + \frac{Hr(x)}{2\varepsilon p(x+H/2)}\right]^{-1} \le \frac{\bar{p}}{r_0}.$$

Далее, поскольку с учетом (1.2), (1.39) и (1.47)

$$\left|\left[\frac{r(x)}{p(x \pm H/2}\right]'\right| \le \frac{c_1(\bar{p}+\bar{r})}{p_0^2},$$

а в силу (1.51) и (1.53) $|\tilde{q}(x)| \le \bar{p}/p_0$, то

$$|\tilde{q}\,'(x)| \le \frac{\bar{p}}{r_0}\left[\frac{c_1(\bar{p}+\bar{r})}{p_0^2}\left(1 + \frac{\bar{p}}{p_0}\right)\right] \equiv c_3 \quad (1.61)$$

и для q_m из (1.60) имеем оценку

$$|q_m| \le c_3 H. \quad (1.62)$$

Подставляя эту оценку в (1.57) и замечая, что в силу (1.7)

$$H = \frac{1-\delta}{N-n} \le \frac{1}{(1-1/B)N},$$

будем иметь

$$|W_{ij}| \le |W_{im}|\,\frac{\bar{p}}{p_0}\frac{c_3}{(1-1/B)N}. \quad (1.63)$$

Пусть число N_2, фигурирующее в утверждениях леммы, удовлетворяет неравенству

$$N_2 \geq \frac{\bar{p}c_3}{p_0(1-1/B)}. \qquad (1.64)$$

Тогда из (1.63) с учетом (1.48) находим, что

$$|W_{ij}| \leq |W_{im}|\,. \qquad (1.65)$$

Этим завершается первый этап оценки $|W_{ij}|$. На втором этапе, выделяя следующую смену знака q_k и повторяя проведенные рассуждения, получим оценку

$$|W_{im}| \leq |W_{im_1}|\,, \qquad (1.66)$$

где число $m_1 < m-1$ таково, что $q_{m_1+1}, \ldots, q_{m-1}$ одного знака, а q_{m_1} — другого или нуль. Отсюда и из (1.65) имеем

$$|W_{ij}| \leq |W_{im_1}|\,.$$

Этот процесс можно продолжать до тех пор, пока у оставшихся q_k, образующих W_{im_l} из правой части оценки типа (1.66), не останется смен знака. После этого для указанных q_k реализуется один из уже рассмотренных сценариев 1^0 или 2^0, что и завершает доказательство (1.49).

Обратимся к оценке A_{ij}. С учетом (1.37) и (1.36)

$$A_{ij} = A_{im} + W_{i,m+1}A_{m+1,j} = A_{im} + W_{im}q_mA_{m+1,j}.$$

В силу выбора m и с учетом (1.52) и (1.56) для $A_{m+1,j}$ справедлива оценка (1.50) с $c_2 = 2$. Для W_{im} справедлива оценка (1.49), а для q_m — оценка (1.62). Поэтому

$$|A_{ij}| \leq |A_{im}| + \frac{\bar{p}}{p_0 r_0}\left(1 + \frac{Hr_0}{2\varepsilon\bar{p}}\right) 2\frac{\bar{p}c_3}{p_0}H.$$

Аналогично устанавливается оценка

$$|A_{im}| \leq |A_{im_1}| + \frac{\bar{p}}{p_0 r_0}\left(1 + \frac{Hr_0}{2\varepsilon\bar{p}}\right) 2\frac{\bar{p}c_3}{p_0}H,$$

подставляя которую в предшествующую оценку, получим

$$|A_{ij}| \leq |A_{im_1}| + \frac{\bar{p}}{p_0 r_0}\left(1 + \frac{Hr_0}{2\varepsilon\bar{p}}\right) 4\frac{\bar{p}c_3}{p_0}H.$$

И так далее до тех пор, пока не придем к оценке

$$|A_{ij}| \leq |A_{im_l}| + \frac{\bar{p}}{p_0 r_0}\left(1 + \frac{Hr_0}{2\varepsilon\bar{p}}\right) 2\frac{\bar{p}c_3}{p_0}(l+1)H.$$

Поскольку общее число этапов $(l+1)$ не превосходит $(N-n)$, а для $|A_{im_l}|$ в силу (1.52) и (1.56) справедлива оценка (1.50) с $c_2 = 2$, то отсюда находим, что

$$|A_{ij}| \leq \frac{\bar{p}}{p_0 c_0}\left(1 + \frac{Hr_0}{2\varepsilon\bar{p}}\right) 2\left(1 + \frac{\bar{p}c_3}{p_0}\right) \equiv \frac{\bar{p}}{p_0 c_0}\left(1 + \frac{Hr_0}{2\varepsilon p_0}\right) c_2. \quad (1.67)$$

Оценка (1.50) установлена в общем случае, что и завершает доказательство леммы.

Л е м м а 1.3. *Если выполнены условия лемм 1.1 и 1.2 и кроме того*

$N \geq \max\{N_3, N_4\}$, *где*

$$N_3 \geq \left(\frac{4\bar{p}^2\bar{r}c_2}{p_0^2 r_0}\right)^{\frac{\bar{p}}{Cr_0}}, \quad N_4 \geq \frac{\bar{r}c}{2p_0 A(1-1/B)} \ln N_4, \tag{1.68}$$

то

$$\max_{i \geq n} |\alpha_i - \alpha_n| \leq \frac{\bar{p}c_2}{p_0 r_0} w_n, \tag{1.69}$$

а

$$\alpha_N \geq c_4 = \frac{p_0}{2\bar{p}\bar{r}}\left(1 - \exp\left(-\frac{A\bar{r}}{p_0}\right)\right). \tag{1.70}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем (1.69). Принимая во внимание (1.35) и (1.25), находим, что

$$\alpha_i - \alpha_n = A_{n+1,i} w_{n+1} = A_{n+1,i} w_n q_n. \tag{1.71}$$

Последний сомножитель правой части (1.71) в силу (1.24) и (1.7) имеет вид

$$q_n = \left(1 - \frac{hr_n^h}{2\varepsilon p_n^h}\right)\left(1 + \frac{Hr_n^h}{2\varepsilon p_{n+1}^h}\right)^{-1}.$$

Условие (1.40) из леммы 1.1 обеспечивает справедливость неравенства (1.45), которое в свою очередь приводит к положительности первого сомножителя в q_n. Поэтому, принимая во внимание (1.2), (1.39) и (1.42), имеем

$$|q_n| = q_n \leq \left(1 - \frac{hr_0}{2\varepsilon\bar{p}}\right)\left(1 + \frac{Hr_0}{2\varepsilon\bar{p}}\right)^{-1}.$$

Подставляя эту оценку и оценку (1.50) в (1.71), получим

$$|\alpha_i - \alpha_n| \leq \frac{\bar{p}c_2}{p_0 r_0} w_n \left(1 - \frac{hr_0}{2\varepsilon\bar{p}}\right), \tag{1.72}$$

откуда и следует оценка (1.69).

Отметим, что в силу (1.43) и (1.42) из (1.72) вытекает и следующая оценка

$$|\alpha_i - \alpha_n| \leq \frac{\bar{p}c_2}{p_0 r_0}\tilde{q}^n. \tag{1.73}$$

Обратимся к доказательству (2.32). Имеем

$$\alpha_N = \alpha_n + (\alpha_N - \alpha_n) \geq \alpha_n - |\alpha_N - \alpha_n|.$$

Используя (1.41), (1.73) и (1.46), находим, что

$$\alpha_N \geq \frac{p_0}{\bar{p}\bar{r}}(1 - \mathring{q}^n) - \frac{\bar{p}c_2}{p_0 r_0}\tilde{q}^n \geq \frac{p_0}{\bar{p}\bar{r}} - \frac{2\bar{p}c_2}{p_0 r_0}\tilde{q}^n. \tag{1.74}$$

Поскольку

$$\ln\frac{1+t}{1-t} \geq 2t \quad \text{при} \quad 0 \leq t < 1,$$

то с учетом (1.42) и (1.7)

$$\tilde{q}^n = \exp\left(-n\ln\frac{1}{\tilde{q}}\right) \leq \exp\left(-n\frac{hr_0}{\varepsilon\bar{p}}\right) = \exp\left(-\frac{\delta r_0}{\varepsilon\bar{p}}\right).$$

Пусть сетка (1.7) такова, что

$$C\varepsilon\ln N < A. \tag{1.75}$$

Тогда $\delta = C\varepsilon\ln N$ и, принимая во внимание (1.40) и (1.68), находим, что

$$\tilde{q}^n \leq \exp\left\{-\frac{Cr_0\ln N}{\bar{p}}\right\} = N^{-Cr_0/\bar{p}} \leq N_3^{-Cr_0/\bar{p}} = \frac{p_o^2 r_0}{4\bar{p}^2\bar{r}c_2}.$$

Отсюда из (1.74) следует справедливость оценки (1.70) при выполнении (1.75).

Если же вместо (1.75) $C\varepsilon \ln N \geq A$, то все много проще, и оценку α_N нужно проводить по-другому. Поскольку в этом случае $\varepsilon \geq A/(C \ln N)$, то с учетом (1.68)

$$\frac{Hr_i^h}{2\varepsilon p_i^h} \leq \frac{H\bar{r}}{2\varepsilon p_0} < \frac{\bar{r}C \ln N}{2A(1-1/B)p_0 N} \leq \frac{C\bar{r} \ln N_4}{2A(1-1/B)p_0 N_4} \leq 1$$

и следовательно q_k из (1.24) положительна не только при $k = 1, \ldots, n$, что следует из (1.40) и (1.45), но и при $k = n+1, \ldots, N-1$. Отсюда из (1.25) вытекает положительность w_i, а из (1.26) — монотонное возрастание α_i при всех $i = 1, \ldots, N$. Тем самым, в частности, $\alpha_N \geq \alpha_n$, что вместе с (1.41) приводит к оценке

$$\alpha_N \geq \frac{p_0}{\bar{p}\bar{r}} \left(1 - \mathring{q}^{\,n}\right). \tag{1.76}$$

Далее, как и выше, с учетом того, что $hn = A$, имеем

$$\mathring{q}^{\,n} \leq \exp\left(-\frac{nh\bar{r}}{\varepsilon p_0}\right) = \exp\left(-\frac{A\bar{r}}{\varepsilon p_0}\right) \leq \exp\left(-\frac{A\bar{r}}{p_0}\right),$$

ибо $\varepsilon \leq 1$. Эта оценка вместе с (1.76) и приводит к (1.70). Лемма доказана.

1.3. Оценка функции Грина и сходимость

Мы имеем все необходимое, чтобы установить равномерную по ε оценку функции Грина.

Т е о р е м а 1.2. *Если $q(x) \equiv 0$ и выполнены условия лемм 1.1–1.3, то*

$$|G(x_i, \xi_j)| \leq c_5, \tag{1.77}$$

где $c_5 = c_5(p, r)$ (см. (1.79)) и не зависит ни от N, ни от ε.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценку $G(x_i, \xi_j)$ проводим сначала для $j \geq n$, а затем для $j < n$.

а) Пусть $j \geq n$. Из (1.38) с учетом лемм 1.2 и 1.3 находим, что

$$|G(x_i, \xi_j)| \leq \frac{\bar{p}c_2}{p_0 r_0 c_4} \begin{cases} |\alpha_i|, & i \leq j, \quad j \geq n, \\ \dfrac{\bar{p}}{p_0}|\alpha_j|, & i \geq j \geq n. \end{cases} \tag{1.78}$$

Если $i \leq n$, то в силу леммы 1.1 $\alpha_i \leq \alpha_n$, а если $i > n$, то

$$|\alpha_i| = |\alpha_n + (\alpha_i - \alpha_n)| \leq \alpha_n + |\alpha_i - \alpha_n|,$$

так что в любом случае

$$|\alpha_i| \leq \alpha_n + |\alpha_i - \alpha_n|.$$

Отсюда и из (1.41), (1.73) следует, что

$$|\alpha_i| \leq \frac{\bar{p}c_2}{p_0 r_0}.$$

Точно так же оценивается и $|\alpha_j|$. Эти оценки вместе с (1.78) приводят к оценке

$$|G(x_i, \xi_j)| \leq c_5 \equiv \frac{\bar{p}^3 c_2^2}{p_0^3 r_0^2 c_4}, \quad j \geq n. \tag{1.79}$$

б) Оценим $G(x_i, \xi_j)$ при $j < n$. Будем теперь пользоваться представлениями (1.33). Начнем с оценки $(\alpha_N - \alpha_j)$. Имеем

$$\alpha_N - \alpha_j = (\alpha_N - \alpha_n) + (\alpha_n - \alpha_j).$$

Первое слагаемое правой части оценивается при помощи (1.69), а второе слагаемое в силу (1.35) имеет вид

$$\alpha_n - \alpha_j = w_{j+1} A_{j+1,n}.$$

Поскольку $j < n$, то в силу леммы 1.1 $q_j > 0$ и для $A_{j+1,n}$ справедлива оценка вида (1.52) с заменой H на h. Принимая все это во внимание, будем иметь

$$|\alpha_N - \alpha_j| \leq \frac{\bar{p}}{p_0 r_0} \left[c_2 w_n + \left(1 + \frac{h r_0}{2\varepsilon \bar{p}} \right) w_{j+1} \right]. \qquad (1.80)$$

Далее, в силу леммы 1.1 функция w_j при $j < n$ является убывающей и поэтому $w_n \leq w_{j+1}$. Подставляя эту оценку в (1.80) и несколько загрубляя, окончательно получим

$$|\alpha_N - \alpha_j| \leq \frac{2\bar{p}c_2}{p_0 r_0} \left(1 + \frac{h r_0}{2\varepsilon \bar{p}} \right) w_{j+1}. \qquad (1.81)$$

Докажем, что точно такая же оценка имеет место и для интересующих нас значений $(\alpha_N - \alpha_i)$. В самом деле, если $i < n$, то в (1.81) нужно только заменить j на i. Но поскольку $(\alpha_N - \alpha_i)$ фигурирует в (1.33) лишь при $i \geq j$, а w_i есть убывающая функция, то во вновь полученной оценке $|\alpha_N - \alpha_i|$ вместо w_{i+1} можно поставить w_{j+1}.

Если же $i > n$, то $(\alpha_N - \alpha_i) = (\alpha_N - \alpha_n) + (\alpha_n - \alpha_i)$ и неравенство (1.69) применимо к обоим слагаемым, в силу чего $|\alpha_N - \alpha_i| \leq (2\bar{p}c_2)/(p_0 r_0) w_n$. Оценка правой части этого неравенства через правую часть (1.80) вытекает из рассуждений, аналогичным вышеприведенным.

Оценим наконец α_i и α_j. Поскольку α_i фигурирует в (1.33) лишь при $i \leq j$, а функция α_i в силу леммы 1.1 при $i \leq n$ является возрастающей, то с учетом (1.41)

$$\alpha_i \leq \alpha_j \leq \alpha_n \leq \frac{\bar{p}}{p_0 r_0}. \qquad (1.82)$$

Итак, все предварительные оценки получены. Подставим теперь (1.82), (1.79) и аналог (1.81) для $(\alpha_N - \alpha_i)$ в (1.33). Если после этого мы учтем, что

$$\left(1 + \frac{r_j^h h_{j+1}}{2\varepsilon p_{j+1}^h}\right) \geq \left(1 + \frac{h r_0}{2\varepsilon \bar{p}}\right),$$

а для α_N справедливы оценки (1.70), то придем к оценке

$$|G(x_i, \xi_j)| \leq \frac{2\bar{p}^2 c_2}{p_0^2 r_0^2 c_4}, \quad j < n,$$

которая, как легко видеть (см., напр., определение c_2 в (1.67)), не хуже (1.79). Теорема доказана.

Т е о р е м а 1.3. *Пусть коэффициенты $p(x)$ и $r(x)$ уравнения (1.1) — непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие (1.2), (1.39) и (1.47), $0 \leq q(x) \leq \bar{q}$, и кроме того $N \geq \max\{N_1, N_2, N_3, N_4\}$. Тогда, если на сетке Ω (1.7)*

$$\left(L^h v\right)_i = f_i, \quad i = 1, \ldots, N-1, \quad v_0 = v_N = 0, \tag{1.83}$$

где L^h — оператор, задаваемый соотношениями (1.8),(1.6), то при $\varepsilon \leq c_6$

$$||v||_{L_\infty^h(\Omega)} \leq c_7 ||f||_{L_1^h(\Omega)},$$

где $c_6 = c_6(p, r)$, $c_7 = c_7(p, r)$ — положительные постоянные.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

а) Пусть $q(x) \equiv 0$. Тогда в силу (1.17)

$$v_i = \left(G(x_i, \xi_j), f_j\right).$$

Отсюда, учитывая теорему 1.2 и полагая $c_7 = c_5$, $c_6 = 1$, приходим к оценке

$$||v||_{L^h_\infty(\Omega)} = \max_{x_i \in \Omega} |v_i| \le c_5 \sum_{x_i \in \Omega} |f_i| \hbar_i = c_5 ||f||_{L^h_1(\Omega)},$$

которая доказывает теорему при $q(x) \equiv 0$.

б) Пусть $q(x) \ge 0$.

В силу доказанного в пункте а) и (1.14)–(1.16)

$$||v||_{L^h_\infty(\Omega)} \le c_5 ||f - q^h v||_{L^h_1(\Omega)} \le c_5 ||f||_{L^h_1(\Omega)} + c_5 \sqrt{\bar{q}(q^h v, v)}. \quad (1.84)$$

Умножая разностное уравнение (1.83) в смысле скалярного произведения (1.14) на $(v/r^h)_i$ и учитывая, что для любой сеточной функции v_i, обращающейся в нуль при $i = 0$ и $i = N$, $(v_{\mathring{x}}, v) = 0$, получаем

$$\varepsilon \left(p^h v_{\bar{x}}, \left(\frac{v}{r^h} \right)_{\bar{x}} \right) + \left(\frac{q^h}{r^h} v, v \right) = \left(f, \frac{v}{r^h} \right).$$

Отсюда, воспользовавшись тождеством

$$\left(\frac{v}{r^h} \right)_{\bar{x},i} = \frac{1}{r^h_{i-1}} v_{\bar{x},i} - \frac{r^h_{\bar{x},i}}{r^h_{i-1} r^h_i} v_i,$$

и получаемыми с учетом (1.2),(1.39),(1.47) неравенствами

$$\varepsilon \left(p^h_i \frac{r^h_{\bar{x},i}}{r^h_{i-1} r^h_i} v_{\bar{x},i}, v_i \right) \le \varepsilon c_1 \sqrt{\frac{\bar{p}}{r_0}} \left|\left| \sqrt{\frac{p^h_i}{r^h_{i-1}}} v_{\bar{x},i} \right|\right| \left|\left| \frac{v}{r^h} \right|\right| \le$$
$$\le \varepsilon \left(\frac{p^h_i}{r^h_{i-1}} v_{\bar{x},i}, v_{\bar{x},i} \right) + \varepsilon \frac{c_1^2 \bar{p}}{4 r_0^2} ||v||^2_{L^h_\infty(\Omega)},$$

$$c_5^2 \bar{q} \bar{r} \left(f, \frac{v}{r^h} \right) \le \frac{2 c_5^4 \bar{q}^2 \bar{r}^2}{r_0^2} ||f||^2_{L^h_1(\Omega)} + \frac{||v||^2_{L^h_\infty(\Omega)}}{8},$$

приходим при $\varepsilon \le c_6 = \dfrac{r_0^2}{2c_1^2 c_5^2 \bar{p}\bar{r}\bar{q}}$ к оценке

$$c_5^2\bar{q}(q^h v, v) \le c_5^2\bar{q}\bar{r}\left[\left(f, \frac{v}{r^h}\right) - \varepsilon\left(\frac{p_i^h}{r_{i-1}^h}v_{\bar{x},i}, v_{\bar{x},i}\right) + \varepsilon\left(p_i^h \frac{r_{\bar{x},i}^h}{r_{i-1}^h r_i^h}v_{\bar{x},i}, v_i\right)\right] \le$$
$$\le \frac{2c_5^4\bar{q}^2\bar{r}^2}{r_0^2}||f||^2_{L_1^h(\Omega)} + \frac{||v||^2_{L_\infty^h(\Omega)}}{4}.$$

Подставляя это соотношение в (1.84) и учитывая неравенство $\sqrt{a^2+b^2} \le |a| + |b|$, имеем

$$||v||^2_{L_\infty^h(\Omega)} \le \left(c_5 + \frac{c_5^2\bar{q}\bar{r}\sqrt{2}}{r_0}\right)||f||^2_{L_1^h(\Omega)} + \frac{||v||^2_{L_\infty^h(\Omega)}}{2}.$$

Отсюда получаем утверждение теоремы с постоянной

$$c_7 = 2c_5\left(1 + \frac{c_5\bar{q}\bar{r}\sqrt{2}}{r_0}\right).$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть

$$z_i = u_i^h - u_i,$$

где u_i и u_i^h суть значения точного и приближенного решений задачи (1.1) в узлах сетки. Тогда, как обычно,

$$L^h z_i = \psi_i, \quad x_i \in \Omega, \quad z_0 = z_N = 0,$$

где

$$\psi_i = f_i^h - L^h u_i = \varepsilon\left[\left(p^h u_{\bar{x}}\right)_{\hat{x}} - (pu')'\right]_i + r_i\left[u_{\overset{\circ}{x}} - u'\right]_i$$

— погрешность аппроксимации задачи (1.8).

Отсюда при $\varepsilon \leq c_6$ в силу теоремы 1.3 приходим к оценке

$$||z||_{L^h_\infty(\Omega)} = c_7||\psi||_{L^h_1(\Omega)}. \tag{1.85}$$

Повторяя теперь в упрощенном виде рассуждения, использованные в [2] при доказательстве теоремы 4, убеждаемся, что если выполнено условие (1.10), то

$$||\psi||_{L^h_1(\Omega)} = O(N^{-2}\ln^2 N)$$

равномерно по ε. Эта оценка вместе с (1.85) завершает доказательство теоремы 1.1 при $\varepsilon \leq c_6$.

В противном случае при достаточно большом N сетка Ω (1.7) обращается в равномерную и в силу принципа максимума схема сходится в норме L^h_∞ с порядком $O(N^{-2})$ [29]. Теорема доказана.

З а м е ч а н и я. 1.2. Как показывает рассмотрение уравнения (1.1) с постоянными коэффициентами и нулевой правой частью множитель $\ln^2 N$ в оценке точности разностной схемы (1.8) на сетке (1.7) опустить нельзя. Действительно, полагая в (1.1) $p(x) \equiv r(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv f(x) \equiv 0$, $g_0 = 1$, $g_1 = 0$, получаем модельную задачу с решением

$$u(x) = (\mathrm{e}^{-x/\varepsilon} - \mathrm{e}^{-1/\varepsilon})/(1 - \mathrm{e}^{-1/\varepsilon})$$

и решением соответствующей разностной задачи (1.8) на сетке (1.7)

$$u^h_i = (v_i - v_N)/(v_0 - v_N),$$

где

$$v_i = \begin{cases} q^i, & i = 1, \ldots, n, \\ q^n Q^{i-n}, & i = n, \ldots, N, \end{cases}$$

$$q = \frac{1 - h/2\varepsilon}{1 + h/2\varepsilon}, \quad Q = \frac{1 - H/2\varepsilon}{1 + H/2\varepsilon},$$

и следовательно при $C \geq 2$

$$v_i = \mathrm{e}^{-x_i/\varepsilon} + O(N^{-2}\ln^2 N + N^{-C}) = \mathrm{e}^{-x_i/\varepsilon} + O(N^{-2}\ln^2 N)$$

равномерно по ε.

1.3. Тот же пример показывает, что условие (1.10) в лучшем случае может быть ослаблено без ухудшения результата лишь до $C \geq 2p(0)/r(0)$.

1.4. Если сетка равномерная, то $u_{\overset{\circ}{x}} = 0.5(u_x + u_{\bar{x}})$. На неравномерной сетке это не так. Как показывает рассмотрение указанного выше примера, замена в (1.8) $u^h_{\overset{\circ}{x}}$ на $0.5(u^h_x + u^h_{\bar{x}})$ приводит к нарушению равномерной по ε сходимости несмотря на то, что указанная замена на самом деле касается только одного уравнения при $i = n$. К тому же эффекту приводит замена $u^h_{\overset{\circ}{x},n}$ в (1.8) на $(hu^h_x + Hu^h_{\bar{x}})_n/(2\hbar_n)$. Как легко видеть, последнее выражение аппроксимирует $u'(x_n)$ на неравномерной сетке с погрешностью $O(H^2 + h^2)$.

1.5. Если вместо (1.2) коэффициент $r(x)$ уравнения (1.1) удовлетворяет условию $r(x) \leq -r_0 < 0$, то утверждение теоремы 1.1 сохраняет силу, если сетку Ω из (1.7) заменить на сетку Ω', сгущающуюся как и Ω, но на правом конце отрезка $[0, 1]$, а параметр C заменить на $C > 2p(1)/|r(1)|$.

Таблица 1.1:

N	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 10^{-2}$	$\varepsilon = 10^{-4}$	$\varepsilon = 10^{-6}$	$\varepsilon = 10^{-8}$
8	.00211	.08554	.09580	.09596	.09596
	4.0	3.2	3.3	3.2	3.2
16	.00053	.02672	.02946	.02955	.02955
	4.0	3.1	3.2	3.2	3.2
32	.00013	.00850	.00922	.00929	.00929
	4.0	3.1	3.2	3.2	3.2
64	.00003	.00271	.00287	.00292	.00292
	4.0	3.1	3.3	3.2	3.2
128	.00001	.00086	.00088	.00091	.00091
	4.0	3.2	3.2	3.2	3.2
256	.00000	.00027	.00027	.00028	.00028

1.6. Если задачу для сопряженного к (1.1) уравнения аппроксимировать при помощи сопряженного к L^h из (1.8) в смысле (1.14) оператора (1.18), то утверждение теоремы 1.1 сохраняется для сетки Ω', описанной в замечании 1.5.

1.4. Численные результаты

Приведем численные результаты, иллюстрирующие точность исследованной схемы. Легко видеть, что функция

$$u(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x/\varepsilon} - \mathrm{e}^{-1/\varepsilon}}{1 - \mathrm{e}^{-1/\varepsilon}} + 2x \cos \frac{\pi x}{2} \tag{1.86}$$

является решением задачи

$$\begin{gathered} \varepsilon u'' + u' = -f(x), \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = 1, \quad u(1) = 0, \end{gathered} \tag{1.87}$$

Таблица 1.2:

i	x_i	z_i
0	0.00000	.00000
1	0.00005	$-.01608$
2	0.00011	$-.02010$
3	0.00017	$-.01972$
4	0.00023	$-.01810$
5	0.00029	$-.01647$
6	0.00035	$-.01516$
7	0.00041	$-.01422$
8	0.00047	$-.01359$
9	0.00053	$-.01318$
10	0.00059	$-.01292$
11	0.10053	$-.01210$
12	0.20047	$-.00562$
13	0.30041	$-.00757$
14	0.40035	$-.00161$
15	0.50029	$-.00418$
16	0.60023	.00092
17	0.70017	$-.00253$
18	0.80011	.00153
19	0.90005	$-.00295$
20	1.00000	.00000

правой частью которой служит

$$f(x) = \left(\frac{\varepsilon\pi^2 x}{2} - 2\right)\cos\frac{\pi x}{2} + \pi(2\varepsilon + x)\sin\frac{\pi x}{2}. \tag{1.88}$$

Эта задача решалась на сетке (1.7) при $B = 0.5$, т. е. при одинаковом числе узлов в "погранслое" и вне его, $A = 0.5$, $C = 2$. В таблице 1.1 приведены значения L^h_∞ - нормы погрешности решения для различных ε и N и указана скорость убывания погрешности при удвоении числа узлов. Построчный анализ таблицы 1.1

при каждом N свидетельствует о стабилизации погрешности при $\varepsilon \to 0$, что является отражением факта равномерной сходимости. Анализ данных таблицы 1.1 по столбцам указывает на то, что скорость сходимости не ниже теоретически обоснованной, ибо даже при $N = 128 \quad \left[(N^{-1} \ln N)/((2N)^{-1} \ln(2N))\right]^2 \approx 3.06$.

В таблице 1.2 приведена поточечная погрешность решения при $\varepsilon = 10^{-4}$ и $N = 20$. Видно, что на мелкой сетке в "погранслое" погрешность плавно меняется без осцилляций, в то время как вне "погранслоя" на крупной сетке наблюдаются мелкие осцилляции погрешности, отражающие немонотонность схемы. На рисунке 1 сплошной линией изображено точное решение при $\varepsilon = 10^{-4}$, а кружочками — приближенное решение для $N = 20$. При этом масштаб в погранслое ширины $\delta = 2\varepsilon \ln N$ для наглядности увеличен.

§2. Равномерная по малому параметру сходимость четырехточечных схем

В этом параграфе для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром в виде множителя при старшей производной исследуются две четырехточечные разностные схемы с несимметричной аппроксимацией второго порядка члена с первой производной. Показано, что на сгущающейся в пограничном слое кусочно-равномерной сетке (1.7) исследуемые схемы сходятся равномерно по малому параметру со скоростью $O(N^{-2}\ln^2 N)$, где N — число узлов сетки.

Для сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка рассмотрим простейшую краевую задачу

$$\begin{gathered} Lu \equiv -\varepsilon(p(x)u')' - (r(x)u)' = f(x), \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = g_0, \quad u(1) = g_1, \end{gathered} \tag{2.1}$$

где

$$p(x) \geq p_0 = \text{const} > 0, \quad r(x) \geq r_0 = \text{const} > 0, \tag{2.2}$$

а $\varepsilon \in (0,1]$ — малый параметр.

Одним из желательных свойств разностной схемы является монотонность в смысле неотрицательности корней характеристического многочлена схемы на равномерной сетке. Известно, что схема с центральной разностью не обладает этим свойством. А трехточечная схема с односторонней разностью хоть и является монотонной, аппроксимирует уравнение (2.1) на гладких решениях лишь с первым порядком. В [2] построена модификация монотонной схемы Самарского и установлена равномерная по малому параметру сходимость этой схемы на сетке Ω (1.7) со скоростью $O(N^{-2}\ln^2 N)$. Заметим, что монотонность это трехточечной схемы достигается за счет специального коэффициента при старшей производной.

Одним из способов получения монотонных схем является добавление к схеме с центральной разностной производной члена с третьей разностью. Рассмотрим эту процедуру для уравнения (2.1) с постоянными коэффициентами $p(x) \equiv r(x) \equiv 1$ и нулевой правой частью $f(x) \equiv 0$. Добавляя член с третьей разностной производной, на равномерной сетке с шагом h получаем несимметричную четырехточечную схему

$$-\varepsilon u^h_{\bar{x}x,i} - u^h_{\overset{\circ}{x}} + \alpha h^2 u^h_{\bar{x}xx,i} = 0,$$

погрешность аппроксимации которой на гладких решениях есть $O(h^2)$.

Возникает вопрос, каким образом выбрать параметр α, чтобы схема была монотонной. Решение этого разностного уравнения представимо в виде линейной комбинации

$$u^h_i = c_1 q_1^i + c_2 q_2^i + c_3 q_3^i,$$

где q_1, q_2, q_3 — корни характеристического многочлена. Если хотя бы один из этих корней отрицателен, решение, вообще говоря, приобретает <пилообразный> вид. В [36] показано, что корни характеристического многочлена данного разностного уравнения неотрицательны при условии

$$\alpha \geq \max\{0;\, 0.5 - \varepsilon/h\}\,.$$

Далее можно действовать двояко. Можно положить $\alpha = 0.5$ [13]. Либо можно положить $\alpha = \max\{0;\, 0.5 - \varepsilon/h\}$ [36]. В этом случае при переменных коэффициентах и на неравномерной сетке значение α будет меняться от узла к узлу, т. е. получим четырехточечную схему с переменным параметром α_i. Легко видеть, что при ε/h — достаточно большом эта схема будет обращаться в схему с центральной разностью. Заметим, что в [14] эта схема обсуждается с точки зрения метода адаптивных сеток.

Обобщая вышесказанное для уравнения (2.1) с переменными коэффициентами, приходим к следующим двум четырехточечным схемам:

— схеме с $\alpha = 0.5$

$$\begin{gathered}
(L^h u^h)_i \equiv -\varepsilon\big(p^h u^h_{\bar{x}}\,\big)_{\hat{x},i} - \big(r^h u^h\big)_{\overset{\circ}{x},i} + 0.5\big(h_i \hbar_i (r^h u^h)_{\bar{x}\hat{x}}\big)_{\hat{x},i} = f^h_i, \\
i = 1, \ldots, N-2, \\
(L^h u^h)_{N-1} \equiv -\varepsilon\big(p^h u^h_{\bar{x}}\big)_{\hat{x},N-1} - \big(r^h u^h\big)_{x,N-1} = f^h_{N-1}, \\
u^h_0 = g_0, \quad u^h_N = g_1;
\end{gathered} \tag{2.3}$$

— и схеме

$$
\begin{gathered}
(\bar{L}^h \bar{u}^h)_i \equiv -\varepsilon\bigl(p^h \bar{u}^h_{\bar{x}}\bigr)_{\hat{x},i} - \bigl(r^h \bar{u}^h\bigr)_{\mathring{x},i} + \bigl(\alpha_i h_i \hbar_i (r^h \bar{u}^h)_{\bar{x}\hat{x}}\bigr)_{\hat{x},i} = f^h_i, \\
i = 1, \ldots, N-2, \\
(\bar{L}^h \bar{u}^h)_{N-1} \equiv -\varepsilon\bigl(p^h \bar{u}^h_{\bar{x}}\bigr)_{\hat{x},N-1} - \bigl(r^h \bar{u}^h\bigr)_{\mathring{x},N-1} = f^h_{N-1}, \\
\bar{u}^h_0 = g_0, \quad \bar{u}^h_N = g_1,
\end{gathered} \tag{2.4}
$$

с переменным параметром

$$
\alpha_i = \max\left\{0;\, 0.5 - \frac{\varepsilon p^h_i}{h_i r^h_{i-1}}\right\}, \tag{2.5}
$$

где

$$
p^h_i = p(x_i - h_i/2), \quad r^h_i = r(x_i), \quad f^h_i = f(x_i). \tag{2.6}
$$

Основной результат параграфа — установленная в теоремах 2.2 и 2.6 равномерная по ε сходимость этих четырехточечных схем на на сгущающейся в пограничном слое кусочно-равномерной сетке Ω (1.7) в смысле сеточной нормы $L^h_\infty(\Omega)$ со скоростью $O(N^{-2}\ln^2 N)$.

2.1. Разностная функция Грина

Как и в предыдущем параграфе введем на отрезке $[0,1]$ произвольную неравномерную сетку $\bar{\omega}$ (1.3) и обозначения (1.4),(1.9). Для сеточных функций, заданных на $\bar{\omega}$ и обращающихся в нуль при $i = 0$ и $i = N$, введем скалярное произведение (1.14) и нормы (1.15),(1.16).

На сетке $\bar{\omega}$ рассмотрим четырехточечный оператор L^h (2.3),(2.6). Легко видеть, что

$$(L^h v)_i = -\varepsilon\big(p^h v_{\bar{x}}\big)_{\hat{x},i} - \big(A[r^h v]\big)_{\hat{x},i}, \quad i = 1, \ldots, N-1, \tag{2.7}$$

где A — следующий оператор:

$$(Aw)_i \equiv \begin{cases} w_i - 0.5\dfrac{h_i}{h_{i+1}}(w_{i+1} - w_i), & i = 1, \ldots, N-1, \\ 0.5(w_{N-1} + w_N), & i = N. \end{cases} \tag{2.8}$$

Известно, что решение задачи

$$(L^h v)_i = f_i, \quad i = 1, \ldots, N-1, \quad v_0 = v_N = 0 \tag{2.9}$$

представимо в виде

$$v_i = (G(x_i, \xi_j), f_j). \tag{2.10}$$

Здесь $G(x_i, \xi_j)$ — функция Грина разностного оператора L^h, которая как функция x_i при фиксированном ξ_j определяется следующими соотношениями:

$$\begin{gathered} L^h G(x_i, \xi_j) = \delta^h(x_i, \xi_j), \quad i, j = 1, \ldots, N-1, \\ G(0, \xi_j) = G(1, \xi_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, N-1, \end{gathered} \tag{2.11}$$

где

$$\delta^h(x_i, \xi_j) = \begin{cases} \hbar_i^{-1} & \text{при } x_i = \xi_j, \\ 0 & \text{при } x_i \neq \xi_j \end{cases}$$

— сеточный аналог дельта-функции Дирака.

Т е о р е м а 2.1. *Пусть коэффициенты $p(x)$ и $r(x)$ уравнения (2.1) удовлетворяют (2.2), непрерывны и*

$$p(x) \leq \bar{p}, \quad r(x) \leq \bar{r}.$$

Пусть к тому же $r(x)$ дифференцируема и

$$|r'(x)| \le R.$$

Тогда, если сетка $\bar{\omega}$ удовлетворяет условию

$$\max_i h_i \le h_0,$$

где $h_0 = h_0(p, r)$ — положительная постоянная, то разностная функция Грина (2.11) оператора L^h (2.3),(2.6) ограничена равномерно по ε:

$$|G(x_i, \xi_j)| \le c = 4/r_0.$$

Так как решение (2.9) представимо в виде (2.10), из теоремы вытекает

С л е д с т в и е 2.1. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда если v_i — решение задачи (2.9),(2.3),(2.6), то*

$$||v||_{L^h_\infty(\bar{\omega})} \le c||f||_{L^h_1(\bar{\omega})}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2.1. Обозначая для удобства $v_i \equiv G(x_i, \xi_j)$ при некотором фиксированном ξ_j, покажем, что для каждого ξ_j, $j = 1, \ldots, N-1$ справедлива оценка

$$|v_i| = |G(x_i, \xi_j)| \le c,$$

где c — постоянная, не зависящая от j, ε или N.

Итак,

$$(L^h v)_i = -\varepsilon\big(p^h v_{\bar{x}}\big)_{\hat{x},i} - \big(A[r^h v]\big)_{\hat{x},i} = \delta^h(x_i,\xi_j), \quad i = 1,\ldots,N-1,$$
$$v_0 = v_N = 0. \tag{2.12}$$

Умножая каждое уравнение (2.12) на $\hbar_i$ и суммируя уравнения с номерами от i до $N-1$, $i = 1,\ldots,N-1$, получим

$$(\mathcal{L}^h v)_i \equiv \varepsilon\big(p^h v_{\bar{x}}\big)_i + \big(A[r^h v]\big)_i = a + \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i \le j, \\ 0 & \text{при} \quad i > j, \end{cases} \tag{2.13}$$
$$i = 1,\ldots,N-1,$$

где

$$a = \varepsilon\big(p^h v_{\bar{x}}\big)_N + \big(A[r^h v]\big)_N = \left(0.5 r^h_{N-1} - \varepsilon\frac{p^h_N}{h_N}\right) v_{N-1}. \tag{2.14}$$

Рассмотрим два случая.

а) Пусть

$$\varepsilon\frac{p^h_N}{h_N} - 0.5 r^h_{N-1} \ge 0. \tag{2.15}$$

Решение уравнения (2.13) v_i с нулевыми граничными условиями представимо в виде

$$v_i = aV_i + W_i, \tag{2.16}$$

где V_i и W_i — решения следующих разностных задач

$$(\mathcal{L}^h V)_i = 1, \quad i = 1,\ldots,N-1, \quad V_0 = V_N = 0, \tag{2.17}$$

$$(\mathcal{L}^h W)_i = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i \le j, \\ 0 & \text{при} \quad i > j, \end{cases} \qquad W_0 = W_N = 0, \tag{2.18}$$

а постоянная a определяется соотношением (2.14), которое с учетом (2.16) дает

$$a = -\frac{\left(\varepsilon \dfrac{p_N^h}{h_N} - 0.5 r_{N-1}^h\right) W_{N-1}}{1 + \left(\varepsilon \dfrac{p_N^h}{h_N} - 0.5 r_{N-1}^h\right) V_{N-1}}. \tag{2.19}$$

Заметим, что (2.17) и (2.18) есть системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, элементы которой положительны на диагонали и отрицательны вне диагонали. Причем если N — достаточно большое, то это матрица с диагональным преобладанием не меньшим $(r_0 - Rh_0/2) \geq r_0/2$.

Следовательно [29, 17] эта матрица является монотонной, и для задач (2.17) и (2.18) справедлив принцип максимума, в силу которого имеем

$$0 \leq W_i \leq V_i \leq 2/r_0.$$

Далее, из (2.15) и (2.19) получаем

$$-1 < a \leq 0.$$

Отсюда, с учетом (2.16),

$$|v_i| \leq V_i \leq 2/r_0, \tag{2.20}$$

что доказывает утверждение теоремы в случае а).

б) Пусть

$$\varepsilon \frac{p_N^h}{h_N} - 0.5 r_{N-1}^h < 0. \tag{2.21}$$

Введем в рассмотрение сеточную функцию

$$w_i \equiv r_i^h v_i, \tag{2.22}$$

которая в силу (2.13),(2.14) определяется соотношениями

$$\begin{gathered}
\varepsilon \frac{p_i^h}{r_{i-1}^h} w_{\bar{x},i} + \varepsilon p_i^h \left(\frac{1}{r^h}\right)_{\bar{x},i} w_i + (Aw)_i - \left(0.5 - \varepsilon \frac{p_N^h}{h_N\, r_{N-1}^h}\right) w_{N-1} = \\
= \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i \le j, \\ 0 & \text{при} \quad i > j, \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, N-1, \\
w_0 = w_N = 0.
\end{gathered} \tag{2.23}$$

Заметим, что (2.23) есть система линейных алгебраических уравнений с матрицей, отличные от нуля элементы которой расположены на трех главных диагоналях и в последнем $(N-1)$-ом столбце. Причем внедиагональные элементы этой матрицы в силу (2.21) неположительны.

Заметим также, что в силу (2.21) при N —достаточно большом

$$\varepsilon \left| p_i^h \left(\frac{1}{r^h}\right)_{\bar{x},i} \right| \le \varepsilon \bar{p} \frac{R}{r_0^2} \le 0.5 h_N \frac{\bar{r}}{p_0} \bar{p} \frac{R}{r_0^2} \le \frac{1}{4}.$$

Поэтому элементы на диагонали положительны и во всех строках диагональное преобладание не меньше $1/4$.

Таким образом [17] эта матрица является монотонной и для задачи (2.23) справедлив принцип максимума, в силу которого имеем $0 \le w_i \le 4$, и следовательно

$$0 \le v_i \le 4/r_0.$$

Теорема доказана.

2.2. Аппроксимация и сходимость

Рассмотрим на сгущающейся в пограничном слое кусочно-равномерной сетке Ω (1.7) четырехточечную схему (2.3),(2.6), погрешность аппроксимации которой

$$\psi_i \equiv f_i^h - \left(L^h u\right)_i = (Lu)(x_i) - (L^h u)_i \tag{2.24}$$

на гладких решениях есть $O(\hbar_i + \hbar_{i+1})$ в узлах $i = n-1, n, N-1$ и $O(\hbar_i^2)$ в остальных узлах. Имеет место

Т е о р е м а 2.2. *Пусть $u(x)$ —решение задачи (2.1) с достаточно гладкими коэффициентами и правой частью, а u_i^h — решение задачи (2.3),(2.3),(2.6) на сетке Ω (1.7), параметр C которой удовлетворяет условию*

$$C > 2p(0)/r(0). \tag{2.25}$$

Тогда

$$||u_i^h - u(x_i)||_{L_\infty^h(\Omega)} = O(N^{-2}\ln^2 N)$$

равномерно по ε.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $z_i \equiv u_i^h - u(x_i)$ — погрешность решения. Тогда

$$\begin{gathered}(L^h z)_i = \psi_i, \quad i = 1, \ldots, N-1, \\ z_0 = z_N = 0,\end{gathered} \tag{2.26}$$

и в силу следствия 2.1

$$||z||_{L_\infty^h(\Omega)} \le c||\psi||_{L_1^h(\Omega)}. \tag{2.27}$$

Повторяя в упрощенном виде рассуждения, использованные в [2] при доказательстве теоремы 4, убеждаемся, что если выполнено условие (2.25), то

$$||\psi||_{L_1^h(\Omega)} = O(N^{-2}\ln^2 N)$$

равномерно по ε. Эта оценка вместе с (2.27) завершает доказательство теоремы.

2.3. Модифицированная четырехточечная схема и ее функция Грина

Заметим, что оператор L^h (2.3),(2.6) не дает сколько-нибудь разумного сопряженного оператора в отличие от оператора $\tilde{L}^h$, отличающегося от L^h на сетке Ω (1.7) лишь в узлах $i = 1$, $n-1$, n и задаваемого на произвольной неравномерной сетке $\bar{\omega}$ (1.3) соотношениями

$$\begin{aligned}(\tilde{L}^h v)_1 \equiv -\varepsilon\big(p^h v_{\bar{x}}\big)_{\hat{x},1} - \big(r^h v\big)_{\overset{\circ}{x},i} + 0.5\big[\hbar_i\big(h_i(r^h v)_{\bar{x}}\big)_{\hat{x}}\big]_{\hat{x},1} - \\ - 0.5(r^h v)_{\check{x},1}, \\ (\tilde{L}^h v)_i \equiv -\varepsilon\big(p^h v_{\bar{x}}\big)_{\hat{x},i} - \big(r^h v\big)_{\overset{\circ}{x},i} + 0.5\big[\hbar_i\big(h_i(r^h v)_{\bar{x}}\big)_{\hat{x}}\big]_{\hat{x},i}, \\ i = 2, \ldots, N-2, \\ (\tilde{L}^h v)_{N-1} \equiv -\varepsilon\big(p^h v_{\bar{x}}\big)_{\hat{x},N-1} - \big(r^h v\big)_{x,N-1},\end{aligned} \tag{2.28}$$

из которых при $h_{N-1} = h_N$ получаем

$$(\tilde{L}^h v)_i = -\varepsilon\big(p^h v_{\bar{x}}\big)_{\hat{x},i} - \Big(\tilde{A}[r^h v]\Big)_{\hat{x},i}, \quad i = 1, \ldots, N-1, \tag{2.29}$$

где $\tilde{A}$ — следующий оператор:

$$(\tilde{A}w)_i \equiv \begin{cases} w_1 - 0.5(w_2 - w_0), & i = 1, \\ w_i - 0.5(w_{i+1} - w_i), & i = 2, \dots, N-1, \\ 0.5(w_{N-1} + w_N), & i = N. \end{cases} \tag{2.30}$$

Несложно убедиться, что сеточный оператор $\tilde{L}^{h*}$, сопряженный к $\tilde{L}^h$ в смысле скалярного произведения (1.14), т. е.

$$(\tilde{L}^h u, v) = (u, \tilde{L}^{h*} v), \tag{2.31}$$

имеет вид

$$\begin{gathered} (\tilde{L}^{h*}v)_1 \equiv -\varepsilon\big(p^h_{i+1} v_x\big)_{\check{x},1} + r^h_1 v_{\bar{x},1}, \\ (\tilde{L}^{h*}v)_i \equiv -\varepsilon\big(p^h_{i+1} v_x\big)_{\check{x},i} + r^h_i \left[(v)_{\overset{\circ}{x},i} - 0.5(\hbar_i (h_{i+1} v_x)_{\check{x}})_{\check{x},i}\right], \\ i = 2, \dots, N-2, \\ (\tilde{L}^{h*}v)_{N-1} \equiv -\varepsilon\big(p^h_{i+1} v_x\big)_{\check{x},N-1} + \\ + r^h_{N-1} \left[(v)_{\overset{\circ}{x},N-1} - 0.5(\hbar_i (h_{i+1} v_x)_{\check{x}})_{\check{x},N-1}\right] + \\ + 0.5 r^h_{N-1} v_{\hat{x},N-1}, \end{gathered} \tag{2.32}$$

и следовательно при $h_1 = h_2$

$$\begin{gathered} (\tilde{L}^{h*}v)_i = -\varepsilon\big(p^h v_{\bar{x}}\big)_{\hat{x},i} + r^h_i (\tilde{B}v)_{\check{x},i} = -\varepsilon\big(p^h_{i+1} v_x\big)_{\check{x},i} + r^h_i (\tilde{B}v)_{\check{x},i}, \\ i = 1, \dots, N-1, \end{gathered}$$

где $\tilde{B}$ — следующий оператор:

$$(\tilde{B}v)_i = \begin{cases} 0.5(v_0 + v_1), & i = 0, \\ v_i + 0.5(v_i - v_{i-1}), & i = 1, \dots, N-2, \\ v_{N-1} + 0.5(v_N - v_{N-2}), & i = N-1. \end{cases}$$

Заметим, что оператор $\tilde{L}^{h*}$ аппроксимирует дифференциальный оператор L^*, сопряженный оператору L из (2.1), причем подобно тому, как при постоянных коэффициентах и замене $x' = 1 - x$ дифференциальный оператор L^* обращается в L, разностный оператор $\tilde{L}^{h*}$ обращается в $\tilde{L}^h$.

Известно, что решение задачи

$$(\tilde{L}^h v)_i = f_i, \quad i = 1, \ldots, N-1, \quad v_0 = v_N = 0$$

представимо в виде

$$v_i = (\tilde{G}(x_i, \xi_j), f_j), \tag{2.33}$$

где $\tilde{G}(x_i, \xi_j)$ — функция Грина разностного оператора $\tilde{L}^h$, которая вводится аналогично $G(x_i, \xi_j)$ (2.11). Имеет место

Т е о р е м а 2.3. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Пусть к тому же сетка $\bar{\omega}$ (1.3) удовлетворяет условиям*

$$\min\{h_1, h_N\} \leq 2\varepsilon p_0/\bar{r},$$

$$h_{N-1} = h_N.$$

Тогда разностная функция Грина оператора $\tilde{L}^h$ (2.28),(2.6) ограничена равномерно по ε:

$$\left|\tilde{G}(x_i, \xi_j)\right| \leq c = 4/r_0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о повторяет доказательство теоремы 2.1 со следующими отличиями, вызванными спецификой задания $(\tilde{A}w)_i$ (2.30) при $i = 1$:

а) Сеточный оператор $\tilde{\mathcal{L}}^h$, аналогичный оператору $\mathcal{L}^h$ (2.13) имеет матрицу с диагональным преобладанием, не меньшим $(r_0 - Rh_0)/2 \geq r_0/4$.

б) Диагональное преобладание в первой строке матрицы системы линейных алгебраических уравнений, аналогичной системе (2.23), устанавливается следующим образом. В силу (2.21) $h_N > 2\varepsilon p_0/\bar{r}$, и следовательно по условию теоремы $h_1 \leq 2\varepsilon p_0/\bar{r}$. Отсюда, принимая во внимание в уравнении (2.23) при $i = 1$ слагаемое

$$\varepsilon \frac{p_1^h}{r_0^h} w_{\bar{x},1} = \frac{\varepsilon}{h_1} \frac{p_1^h}{r_0^h} w_1,$$

получаем, что диагональное преобладание в первой строке не меньше

$$\frac{\varepsilon}{h_1} \frac{p_0}{\bar{r}} - \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}.$$

В заключение этого раздела заметим, что решение задачи

$$\left(\tilde{L}^{h*} w\right)_i = f_i, \quad i = 1, \ldots, N-1,$$
$$w_0 = w_N = 0,$$

представляется при помощи функции Грина по формуле

$$w_i = \left(\tilde{G}(\xi_j, x_i), f_j\right).$$

2.4. Аппроксимация и сходимость модифицированной четырехточечной схемы

Рассмотрим на сгущающейся в пограничном слое кусочно-равномерной сетке Ω (1.7) четырехточечную схему с оператором $\tilde{L}^h$ (2.28),(2.6)

$$\begin{gathered}(\tilde{L}^h \tilde{u}^h)_i = f_i^h, \quad i = 1, \ldots, N-1, \\ \tilde{u}_0^h = g_0, \quad \tilde{u}_N^h = g_1,\end{gathered} \tag{2.34}$$

погрешность аппроксимации которой

$$\tilde{\psi}_i \equiv f_i^h - \left(\tilde{L}^h u\right)_i = \psi_i + \left(L^h u - \tilde{L}^h u\right)_i, \tag{2.35}$$

где ψ_i (2.24) — погрешность аппроксимации схемы с оператором L^h (2.3),(2.6). Заметим, что операторы L^h и $\tilde{L}^h$ отличаются в узлах $i = 1,\ n-1,\ n$, и если погрешность аппроксимации ψ_i оператора L^h на гладких решениях есть $O(\hbar_i + \hbar_{i+1})$ в узлах $i = n-1, n, N-1$ и $O(\hbar_i^2)$ в остальных узлах, то погрешность аппроксимации $\tilde{\psi}_i$ оператора $\tilde{L}^h$ на гладких решениях есть лишь $O(1)$ в узлах $i = 1, n-1, n$. С другой стороны оператор $\tilde{L}^h$ обладает сопряженным оператором $\tilde{L}^{h*}$ (2.32), что позволяет получить теорему сходимости и для задачи, сопряженной задаче (2.1) (замечание 2.1).

Рассмотрим $\tilde{\psi}_i$ более подробно.

Л е м м а 2.1. *Если параметр C сетки Ω удовлетворяет условию*

$$C > 2p(0)/r(0),$$

то погрешность аппроксимации $\tilde{\psi}_i$ *(2.35) представима в виде*

$$\tilde{\psi}_i = \psi_i + \eta_{\hat{x},i}, \tag{2.36}$$

где

$$||\psi_i||_{L_1^h} = O(N^{-2}\ln^2 N), \tag{2.37}$$

$$\eta_i = \begin{cases} 0, & i \neq 1, n, \\ O(N^{-1}\ln N), & i = 1, n \end{cases} \tag{2.38}$$

равномерно по ε*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из представлений (2.7),(2.8) оператора L^h и (2.29),(2.30) оператора $\tilde{L}^h$ легко видно, что на сетке Ω (1.7) $(L^h u - \tilde{L}^h u)_i = \eta_{\hat{x},i}$, где $\eta_i = 0$ при $i \neq 1, n$. Далее, повторяя в упрощенном виде рассуждения, использованные в [2] при доказательстве теоремы 4, получаем утверждение леммы.

Имеет место

Т е о р е м а 2.4. *Пусть* $u(x)$ *—решение задачи (2.1) с достаточно гладкими коэффициентами и правой частью, а* $\tilde{u}_i^h$ *— решение задачи (2.34),(2.28),(2.6) на сетке* Ω *(1.7), параметр* C *которой удовлетворяет условию*

$$C > 2p(0)/r(0). \tag{2.39}$$

Тогда

$$||\tilde{u}_i^h - u(x_i)||_{L_\infty^h} = O(N^{-2}\ln^2 N) \tag{2.40}$$

равномерно по ε*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $z_i \equiv \tilde{u}_i^h - u(x_i)$ — погрешность решения. Тогда

$$(\tilde{L}^h z)_i = \tilde{\psi}_i, \quad i = 1, \ldots, N-1, \qquad (2.41)$$
$$z_0 = z_N = 0,$$

где $\tilde{\psi}_i$ —погрешность аппроксимации (2.35), для которой справедлива лемма 2.1.

Введем в рассмотрение функцию V_i, определяемую соотношениями

$$-\varepsilon p_i^h V_{\bar{x},i} = \eta_i, \quad i = 1, \ldots, N, \qquad (2.42)$$
$$V_0 = 0.$$

Учитывая соотношения (2.38) для η_i, получаем

$$V_i = O(N^{-2} \ln^2 N), \qquad (2.43)$$
$$V_i - V_{i-1} = 0, \quad i \neq 1, n.$$

Тогда погрешность решения z_i представима в виде

$$z_i = V_i - V_N\, x_i + W_i, \qquad (2.44)$$

где

$$||V_i - V_N\, x_i||_{L_\infty^h} = O(N^{-2} \ln^2 N),$$

а W_i есть решение задачи

$$(L^h W)_i = F_i \equiv \overset{\circ}{\psi} + \big(\eta_{\hat{x}} - L^h V\big)_i + V_N (L^h x_i),$$
$$W_0 = W_N = 0.$$

Замечая, что сетка Ω (1.7) удовлетворяет условиям теоремы 2.3, и что W_i представляется при помощи разностной функции Грина в виде (2.33), в силу теоремы 2.3 имеем

$$||W_i||_{L^h_\infty} = c\,||F_i||_{L^h_1}.$$

Очевидно, что

$$V_N(L^h x_i) = O(N^{-2}\ln^2 N).$$

Принимая также во внимание лемму 2.1, имеем

$$||W_i||_{L^h_\infty} \le ||\eta_{\hat{x}} - L^h V||_{L^h_1} + O(N^{-2}\ln^2 N).$$

Далее, учитывая представление оператора $\tilde{L}^h$ (2.29),(2.30) и соотношения (2.42),(2.43) для V_i, получаем

$$||\eta_{\hat{x}} - L^h V||_{L^h_1} = ||\big(A[r^h V]\big)_{\hat{x}}||_{L^h_1} \le 2\sum_{i=1}^{N} |r^h_i V_i - r^h_{i-1} V_{i-1}| \le$$

$$\le 2\left(\sum_{i=1}^{N} |r^h_i - r^h_{i-1}|\,|V_i| + \sum_{i=1}^{N} r^h_{i-1}|V_i - V_{i-1}|\right) = O(N^{-2}\ln^2 N),$$

что завершает доказательство теоремы.

З а м е ч а н и е. 2.1. Если задачу для сопряженного к (2.1) уравнения аппроксимировать при помощи сопряженного к $\tilde{L}^h$ оператора $\tilde{L}^{h*}$ (2.32) на сетке Ω', сгущающейся как и Ω (1.7), но на правом конце отрезка $[0, 1]$, то имеет место теорема аналогичная теореме 2.4.

2.5. Четырехточечная схема с переменным параметром и ее функция Грина

На произвольной неравномерной сетке $\bar{\omega}$ (1.3) рассмотрим четырехточечный оператор $\bar{L}^h$ (2.4),(2.6) с переменным параметром

α_i (2.5). Легко видеть, что

$$(\bar{L}^h v)_i = -\varepsilon\bigl(p^h v_{\bar{x}}\bigr)_{\hat{x},i} - \begin{cases} \bigl(\bar{A}[r^h v]\bigr)_{\hat{x},i}, & i = 1,\dots,N-2, \\ (r^h v)_{\mathring{x},N-1}, & i = N-1, \end{cases} \tag{2.45}$$

где $\bar{A}$ — следующий оператор:

$$\begin{gathered}(\bar{A}w)_i \equiv -(0.5-\alpha_i)(w_i - w_{i-1}) + w_i - \alpha_i \frac{h_i}{h_{i+1}}(w_{i+1} - w_i), \\ i = 1,\dots,N-1.\end{gathered} \tag{2.46}$$

Известно, что решение задачи

$$(\bar{L}^h v)_i = f_i, \quad i = 1,\dots,N-1, \quad v_0 = v_N = 0$$

представимо в виде

$$v_i = (\bar{G}(x_i,\xi_j), f_j),$$

где $\bar{G}(x_i,\xi_j)$ — функция Грина разностного оператора $\bar{L}^h$, которая вводится аналогично $G(x_i,\xi_j)$ (2.11). Имеет место

Т е о р е м а 2.5. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Пусть к тому же сетка $\bar{\omega}$ удовлетворяет условию*

$$h_{N-1} = h_N,$$

и одному из следующих условий

$$\begin{aligned} &\textit{либо} \quad \frac{\varepsilon}{h_{N-1}} \geq \frac{\bar{r}}{2p_0}; \\ &\textit{либо} \quad h_N/h_0 \geq \tilde{c}, \end{aligned}$$

где $\tilde{c}$ — положительная постоянная. Тогда разностная функция Грина оператора $\bar{L}^h$ (2.28),(2.6) ограничена равномерно по ε:

$$\left|\bar{G}(x_i,\xi_j)\right| \leq \bar{c} = \bar{c}\,(p(x), r(x)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначая для удобства $v_i \equiv \bar{G}(x_i, \xi_j)$ при некотором фиксированном ξ_j, покажем, что для каждого ξ_j, $j = 1, \ldots, N-1$ справедлива оценка

$$|v_i| = \left|\bar{G}(x_i, \xi_j)\right| \le \bar{c},$$

где $\bar{c}$ — постоянная, не зависящая от j, ε или N.

Итак,

$$\begin{gathered}(\bar{L}^h v)_i = -\varepsilon\big(p^h v_{\bar{x}}\big)_{\hat{x},i} - \big(\bar{A}[r^h v]\big)_{\hat{x},i} = \delta^h(x_i, \xi_j), \quad i = 1, \ldots, N-2,\\ (\bar{L}^h v)_{N-1} = -\varepsilon\big(p^h v_{\bar{x}}\big)_{\hat{x},N-1} - \big(r^h v\big)_{\overset{\circ}{x},N-1} = \delta^h(x_{N-1}, \xi_j),\\ v_0 = v_N = 0.\end{gathered} \tag{2.47}$$

Умножая каждое уравнение (2.47) на $\hbar_i$ и суммируя уравнения с номерами от i до $N-1$, $i = 1, \ldots, N-1$, получим

$$(\bar{\mathcal{L}}^h v)_i \equiv \varepsilon\big(p^h v_{\bar{x}}\big)_i + \big(\bar{A}[r^h v]\big)_i = a + \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i \le j, \\ 0 & \text{при} \quad i > j, \end{cases} \tag{2.48}$$
$$i = 1, \ldots, N-1,$$

где

$$a = \varepsilon\big(p^h v_{\bar{x}}\big)_N + \frac{(r^h v)_N - (r^h v)_{N-2}}{2} + \big(A[r^h v]\big)_{N-1}. \tag{2.49}$$

Решение уравнения (2.48) v_i с нулевыми граничными условиями представимо в виде

$$v_i = a V_i + W_i, \tag{2.50}$$

где V_i и W_i — решения следующих разностных задач

$$(\bar{\mathcal{L}}^h V)_i = 1, \quad i = 1, \ldots, N-1, \quad V_0 = V_N = 0, \tag{2.51}$$

$$(\bar{\mathcal{L}}^h W)_i = \begin{cases} 1 \quad \text{при} \quad i \le j, \\ 0 \quad \text{при} \quad i > j, \end{cases} \qquad W_0 = W_N = 0. \tag{2.52}$$

Заметим, что (2.51) и (2.52) есть системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, причем так как

$$(\bar{\mathcal{L}}^h v)_i = -\left[\frac{\varepsilon p_i^h}{h_i} - r_i^h(0.5-\alpha_i)\right] v_{i-1} +$$
$$+\left[\frac{\varepsilon p_i^h}{h_i} + r_i^h\left\{-(0.5-\alpha_i) + 1 + \alpha_i\frac{h_i}{h_{i+1}}\right\}\right] v_i - \alpha_i\frac{h_i}{h_{i+1}} r_{i+1}^h v_{i+1},$$

то в силу выбора α_i (2.5) элементы этой матрицы положительны на диагонали и отрицательны вне диагонали, и если N — достаточно большое, то это матрица с диагональным преобладанием не меньшим $(r_0 - Rh_0/2) \ge r_0/2$.

Следовательно [29, 17] эта матрица является монотонной, и для задач (2.51) и (2.52) справедлив принцип максимума, в силу которого имеем

$$0 \le W_i \le V_i \le 2/r_0. \tag{2.53}$$

Рассмотрим два случая.

а) Пусть

$$\varepsilon\frac{p_{N-1}^h}{h_{N-1} r_{N-2}^h} - 0.5 \ge 0. \tag{2.54}$$

Тогда в силу (2.5) $\alpha_{N-1} = 0$, и (2.49) обращается в соотношение

$$a = -\left(\varepsilon\frac{p_N^h}{h_N} - 0.5 r_{N-1}^h\right) v_{N-1},$$

из которого с учетом (2.50) получаем

$$a = -\frac{\left(\varepsilon \dfrac{p_N^h}{h_N} - 0.5 r_{N-1}^h\right) W_{N-1}}{1 + \left(\varepsilon \dfrac{p_N^h}{h_N} - 0.5 r_{N-1}^h\right) V_{N-1}}.$$

Если множитель в скобках положителен, то $-1 < a \le 0$. В противном случае, так как по условию теоремы $h_{N-1} = h_N$ и функции $p(x)$ и $r(x)$ предполагаются достаточно гладкими, из (2.54) имеем

$$\frac{r_{N-2}^h}{2p_{N-1}^h} \le \frac{\varepsilon}{h_N} \le \frac{r_{N-1}^h}{2p_N^h},$$

и следовательно множитель в скобках есть $O(h_0)$. Отсюда при достаточно большом N имеем $|a| \le 1$, и следовательно

$$|v_i| \le 4/r_0,$$

что доказывает утверждение теоремы в случае а).

б) Пусть

$$\varepsilon \frac{p_{N-1}^h}{h_{N-1} r_{N-2}^h} - 0.5 \le 0. \tag{2.55}$$

Уравнение (2.47) при $i = N-1$ с учетом нулевых граничных условий можно переписать в виде

$$\varepsilon \left(\frac{p_{N-1}^h}{h_{N-1}} + \frac{p_N^h}{h_N}\right) v_{N-1} + \left(\frac{r_{N-2}^h}{2} - \varepsilon \frac{p_{N-1}^h}{h_{N-1}}\right) v_{N-2} = \delta_{j,N-1} = \\ = \begin{cases} 1, & j = N-1, \\ 0, & j \ne N-1. \end{cases}$$

Заметим, что здесь в силу (2.55) во втором слагаемом множитель в скобках неотрицателен. Отсюда в силу (2.50)

$$a = a_1 + a_2,$$

где

$$a_1 = -\frac{\varepsilon\left(\dfrac{p^h_{N-1}}{h_{N-1}} + \dfrac{p^h_N}{h_N}\right) W_{N-1} + \left(\dfrac{r^h_{N-2}}{2} - \varepsilon\dfrac{p^h_{N-1}}{h_{N-1}}\right) W_{N-2}}{\varepsilon\left(\dfrac{p^h_{N-1}}{h_{N-1}} + \dfrac{p^h_N}{h_N}\right) V_{N-1} + \left(\dfrac{r^h_{N-2}}{2} - \varepsilon\dfrac{p^h_{N-1}}{h_{N-1}}\right) V_{N-2}}$$

$$a_2 = \frac{\delta_{j,N-1}}{\varepsilon\left(\dfrac{p^h_{N-1}}{h_{N-1}} + \dfrac{p^h_N}{h_N}\right) V_{N-1} + \left(\dfrac{r^h_{N-2}}{2} - \varepsilon\dfrac{p^h_{N-1}}{h_{N-1}}\right) V_{N-2}},$$

и в силу (2.53)

$$-1 < a_1 < 0,$$

$$0 \le a_2 \le$$
$$\le \left[\left\{\varepsilon\left(\frac{p^h_{N-1}}{h_{N-1}} + \frac{p^h_N}{h_N}\right) + \left(\frac{r^h_{N-2}}{2} - \varepsilon\frac{p^h_{N-1}}{h_{N-1}}\right)\right\}\min\left\{V_{N-1}, V_{N-2}\right\}\right]^{-1} \le$$
$$\le \frac{2}{r_0 \min\left\{V_{N-1}, V_{N-2}\right\}},$$

т. е.

$$|a| \le \max\left\{1, \frac{2}{r_0 \min\left\{V_{N-1}, V_{N-2}\right\}}\right\},$$

$$|v_i| \le \frac{4}{r_0}\max\left\{1, \frac{2}{r_0 \min\left\{V_{N-1}, V_{N-2}\right\}}\right\}. \tag{2.56}$$

Заметим, что в силу принципа максимума [29] для системы (2.51) V_i оценивается снизу функцией $\tilde{V}(x_i)$:

$$0 \le \tilde{V}(x_i) < V_i, \tag{2.57}$$

где
$$\tilde{V}(x)=\frac{p_0}{3\tilde{c}\bar{p}\bar{r}}x\left[1-\exp\left\{-\frac{1-x}{h_N}\right\}\right],$$
и следовательно
$$\tilde{V}(0)=\tilde{V}(1)=0,\qquad 0\le\tilde{V}(x)\le\frac{p_0}{3\tilde{c}\bar{p}\bar{r}},\qquad |\tilde{V}'(x)|\le\frac{p_0}{3\tilde{c}\bar{p}\bar{r}}\left(1+\frac{1}{h_N}\right).$$
Действительно, так как
$$\left(\bar{\mathcal{L}}^h\tilde{V}\right)(x_i)=\frac{p_0}{3\tilde{c}\bar{p}\bar{r}}\left[\varepsilon p(x_i)\tilde{V}'(\xi)+(r\tilde{V})(x_i)-0.5h_i(r\tilde{V})'(\eta)\right],$$
где $\xi,\eta\in[x_{i-1},x_{i+1}]$, то принимая во внимание, что в силу (2.55) $\varepsilon\le 0.5h_0\bar{r}/p_0$, при достаточно большом N приходим к оценке
$$\left|\left(\bar{\mathcal{L}}^h\tilde{V}\right)(x_i)\right|\le\frac{p_0}{3\tilde{c}\bar{p}\bar{r}}\left[h_0\frac{\bar{r}\bar{p}}{p_0}\left(1+\frac{1}{h_N}\right)+(\bar{r}+0.5h_0R)\right]\le 1=\left(\bar{\mathcal{L}}^hV\right)_i,$$
которая в силу принципа максимума доказывает (2.57).

Таким образом при достаточно большом N получаем оценку,
$$\min\left\{V_{N-1},V_{N-2}\right\}\ge\frac{p_0}{3\tilde{c}\bar{p}\bar{r}}(1-2h_0)(1-\mathrm{e}^{-1})\ge\frac{p_0}{6\tilde{c}\bar{p}\bar{r}},$$
которая вместе с (2.56) доказывает теорему с постоянной
$$\bar{c}=\frac{48\tilde{c}\bar{p}\bar{r}}{p_0r_0}.$$

2.6. Аппроксимация и сходимость четырехточечной схемы с переменным параметром

Рассмотрим на сгущающейся в пограничном слое кусочно-равномерной сетке Ω (1.7) четырехточечную схему (2.4),(2.6) с переменным параметром α_i (2.5), погрешность аппроксимации которой

$$\bar{\psi}_i \equiv f_i^h - \left(\bar{L}^h u\right)_i = (Lu)(x_i) - (\bar{L}^h u)_i.$$

Так как $|\alpha_{\hat{x},i}| \leq \text{const}$, то из (2.4) вытекает, что погрешность аппроксимации этой схемы на гладких решениях есть $O(\hbar_i + \hbar_{i+1})$ в узлах $i = n-1, n$ и $O(\hbar_i^2)$ в остальных узлах. Имеет место

Т е о р е м а 2.6. *Пусть $u(x)$ —решение задачи (2.1) с достаточно гладкими коэффициентами и правой частью, а $\bar{u}_i^h$ — решение задачи (2.4),(2.6),(2.5) на сетке Ω (1.7), параметр C которой удовлетворяет условию*

$$C > 2p(0)/r(0).$$

Тогда

$$||\bar{u}_i^h - u(x_i)||_{L_\infty^h(\Omega)} = O(N^{-2}\ln^2 N)$$

равномерно по ε.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Замечая, что сетка Ω (1.7) удовлетворяет условиям теоремы 2.5, повторяем рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 2.2.

Таблица 2.1:

N	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 10^{-2}$	$\varepsilon = 10^{-4}$	$\varepsilon = 10^{-6}$	$\varepsilon = 10^{-8}$
8	.00480	.25451	.28686	.28719	.28720
	2.7	3.9	3.7	3.7	3.7
16	.00175	.06467	.07770	.07784	.07784
	3.5	3.9	3.9	3.9	3.9
32	.00050	.01642	.01986	.01991	.01991
	3.7	2.1	2.9	2.9	2.9
64	.00013	.00778	.00695	.00694	.00694
	3.9	2.5	2.5	2.5	2.5
128	.00003	.00308	.00279	.00278	.00278
	3.9	2.8	2.8	2.8	2.8
256	.00001	.00109	.00099	.00099	.00099

2.7. Численные результаты

Приведем численные результаты, иллюстрирующие точность исследованных схем. Задача(1.86)–(1.88) решалась на сетке Ω (1.7) при $2n = N$, т. е. при одинаковом числе узлов в <погранслое> и вне его, $A = 0.5, \quad C = 2$ по соответствующей оператору L^h четырехточечной схеме (2.3) (таблицы 2.1, 2.3, рисунок 2) и соответствующей оператору $\bar{L}^h$ четырехточечной схеме (2.4) с переменным параметром (2.5) (таблицы 2.2, 2.4, рисунок 3). В таблицах 2.1 и 2.2 приведены значения L^h_∞ - нормы погрешности решения для различных ε и N и указана скорость убывания погрешности при удвоении числа узлов. Построчный анализ таблиц при каждом N свидетельствует о стабилизации погрешности при $\varepsilon \to 0$, что является отражением факта равномерной сходимости.

Таблица 2.2:

N	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 10^{-2}$	$\varepsilon = 10^{-4}$	$\varepsilon = 10^{-6}$	$\varepsilon = 10^{-8}$
8	0.00211	0.10525	0.13089	0.13114	0.13114
	4.0	4.3	3.4	3.4	3.4
16	0.00053	0.02462	0.03871	0.03886	0.03886
	4.0	6.7	4.2	4.2	4.2
32	0.00013	0.00368	0.00928	0.00934	0.00935
	4.0	1.7	4.2	4.2	4.2
64	0.00003	0.00218	0.00219	0.00222	0.00222
	4.0	2.5	4.2	4.1	4.1
128	0.00001	0.00086	0.00052	0.00053	0.00053
	4.0	3.2	3.4	3.5	3.5
256	0.00000	0.00027	0.00016	0.00015	0.00015

В §1 аналогичные численные результаты приведены для схемы с центральной разностью. Сравнение показывает, что схема с центральной разностью в 2–4 раза (для различных ε и N) точнее четырехточечной схемы с оператором L^h. Схема же, соответствующая оператору $\bar{L}^h$ с переменным параметром сравнима по точности со схемой с центральной разностью, при этом схема с центральной разностью несколько точнее этой четырехточечной схемы на грубых сетках и менее точна на более мелких сетках.

В таблицах 2.3 и 2.4 приведена поточечная погрешность решения рассматриваемых четырехточечных схем при $\varepsilon = 10^{-4}$ и $N = 20$. Поскольку схемы монотонные, погрешность меняется без осциляций. На рисунках 2 и 3 сплошной линией изображено точное решение при $\varepsilon = 10^{-4}$, а кружочками — приближенное решение, получаемое по этим двум схемам при $N = 20$. При этом

Таблица 2.3:

i	x_i	z_i
0	0.00000	.00000
1	0.00005	.01873
2	0.00011	.01588
3	0.00017	.00670
4	0.00023	−.00274
5	0.00029	−.01050
6	0.00035	−.01624
7	0.00041	−.02025
8	0.00047	−.02294
9	0.00053	−.02466
10	0.00059	−.02548
11	0.10053	−.03604
12	0.20047	−.04038
13	0.30041	−.04419
14	0.40035	−.04728
15	0.50029	−.04946
16	0.60023	−.05045
17	0.70017	−.04967
18	0.80011	−.04555
19	0.90005	−.03354
20	1.00000	.00000

Таблица 2.4:

i	x_i	z_i
0	0.00000	.00000
1	0.00005	.00125
2	0.00011	.00658
3	0.00017	.01200
4	0.00023	.01633
5	0.00029	.01943
6	0.00035	.02153
7	0.00041	.02289
8	0.00047	.02375
9	0.00053	.02428
10	0.00059	.02461
11	0.10053	.01684
12	0.20047	.01251
13	0.30041	.00870
14	0.40035	.00557
15	0.50029	.00326
16	0.60023	.00184
17	0.70017	.00132
18	0.80011	.00151
19	0.90005	.00176
20	1.00000	.00000

масштаб в погранслое ширины $\delta = 2\varepsilon \ln N$ для наглядности увеличен.

Глава 2.

Разностные схемы для параболических уравнений, вырождающихся в гиперболические уравнения

§1. Равномерная по малому параметру сходимость схемы с весами

В этом параграфе для одномерного нестационарного уравнения конвекции-диффузии исследуется двухслойная разностная схема с весами с аппроксимацией первой производной по пространству центральным разностным отношением. Показано, что на сгущающейся в пограничном слое кусочно-равномерной сетке при $\sigma \geq 0.5$ исследуемая схема сходится равномерно по малому параметру в смысле сеточной нормы L_∞^h со скоростью $O\left(N^{-2}\ln^2 N + (\sigma - 0.5)\tau + \tau^2\right)$, где σ — параметр схемы, N — число узлов сетки по пространству, τ — шаг по времени.

Рассмотрим первую краевую задачу для одномерного нестационарного уравнения конвекции-диффузии

$$\begin{gathered}\dot{u} + L_\varepsilon u = f(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le T,\\ u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(1,t) = \mu_2(t), \quad 0 < t \le T,\\ u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le 1,\end{gathered} \tag{1.1}$$

где L_ε — сингулярно возмущенный оператор с малым параметром $\varepsilon \in (0,1]$, задаваемый соотношением

$$L_\varepsilon v \equiv -\varepsilon(p(x)v')' - r(x)v' + q(x)v, \tag{1.2}$$

коэффициенты которого

$$\begin{gathered}p(x) \ge p_0 = \mathrm{const} > 0, \quad r(x) \ge r_0 = \mathrm{const} > 0,\\ q(x) \ge 0\end{gathered}$$

предполагаются достаточно гладкими.

Будем также предполагать, что для задачи (1.1) $\varphi(0) = \mu_1(0)$, $\varphi(1) = \mu_2(0)$ и выполняются условия согласования [22], которые обеспечивают достаточную гладкость решения.

Известно [11, 8], что при $\varepsilon \to 0$ решение задачи (1.1) сходится при $0 < x \le 1$ к решению вырожденной задачи

$$\begin{gathered}\dot{v} - r(x)v' + q(x)v = f(x,t),\\ v(1,t) = \mu_2(t), \quad v(x,0) = \varphi(x),\end{gathered}$$

и при малых ε неиспользованное граничное условие приводит к образованию в окрестности $x = 0$ так называемого эллиптического пограничного слоя, где решение $u(x,t)$ быстро меняется по переменной x, а его производные по этой переменной не являются ограниченными равномерно по ε. Так, при $p(x) \equiv r(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv \varphi(x) \equiv 0$, $f(x,t) \equiv 0$, $\mu_2(t) \equiv 0$ решение (1.1) представимо в виде

$$u(x,t) = \mu_1(t)\exp(-x/\varepsilon) + O(\varepsilon).$$

Для стационарного уравнения с оператором L_ε (1.2) на сгущающейся в пограничном слое кусочно-равномерной сетке Ω (1.1.7) установлена равномерная по ε сходимость в смысле сеточной нормы L_∞^h ряда классических разностных схем [37, 2, 18], в том числе равномерная сходимость известной трехточечной схемы с аппроксимацией первой производной центральным разностным отношением (§1 главы 1). Для нестационарного уравнения (1.1),(1.2) в [37] на сетке Ω (1.1.7) исследована неявная четырехточечная разностная схема с аппроксимацией первой производной по пространству односторонней разностью и показана ее равномерная по ε сходимость со скоростью $O(N^{-1}\ln N + \tau)$.

Настоящий параграф посвящен двухслойной разностной схеме с весами [29] с аппроксимацией первой производной по пространству центральным разностным отношением.

Введем равномерную сетку по времени

$$\omega_\tau = \{\, t_j \mid t_j = j\tau, \quad j = 0,\ldots,K, \quad \tau = T/K \,\} \tag{1.3}$$

и сетку в $[0,1]\times[0,T]$

$$\Omega \times \omega_\tau = \{\, (x_i,t_j), \quad i = 0,\ldots,N, \quad j = 0,\ldots,K \,\}, \tag{1.4}$$

и обозначим, как обычно,

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad \hbar_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{2},$$
$$v_{\bar{x},i} = \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i}, \quad v_{\hat{x},i} = \frac{v_{i+1} - v_i}{\hbar_i}, \quad v_{\overset{\circ}{x},i} = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2\hbar_i};$$
$$v_t = \frac{\hat{v} - v}{\tau}, \quad v^\sigma = \sigma\hat{v} + (1-\sigma)v,$$
$$\hat{v} = v_i^{j+1}, \quad v = v_i^j.$$

Для сеточных функций, определенных на Ω и обращающихся в нуль при $i = 0$ и $i = N$, введем скалярное произведение (1.14) и нормы (1.15),(1.16). Для сеточных функций, определенных при $i = 1, \ldots, N$, введем скалярное произведение

$$(u, v] = \sum_{i=1}^{N} u_i v_i h_i.$$

На сетке $\Omega \times \omega_\tau$ рассмотрим двухслойную разностную схему с весами

$$\begin{gathered} \left[u_t^h + L_\varepsilon^h u^{h,\sigma}\right]_i^j = f_i^{h,j}, \quad i = 1, \ldots, N-1, \quad j = 0, \ldots, K-1, \\ u_0^{h,j} = \mu_1(t_j), \quad u_N^{h,j} = \mu_2(t_j), \quad j = 0, \ldots, K, \\ u_i^{h,0} = \varphi_i^h, \quad i = 0, \ldots, N, \end{gathered} \tag{1.5}$$

где $\sigma \in [0.5, 1]$ — параметр схемы, соотношение

$$L_\varepsilon^h v \equiv -\varepsilon\big(p^h v_{\bar{x}}\big)_{\hat{x}} - r^h v_{\overset{\circ}{x}} + q^h v \tag{1.6}$$

задает трехточечный разностный оператор, аппроксимирующий L_ε,

$$\begin{gathered} p_i^h = p(x_i - h_i/2), \quad r_i^h = r(x_i), \quad q_i^h = q(x_i), \\ f_i^{h,j} = \sigma f(x_i, t_{j+1}) + (1-\sigma) f(x_i, t_j), \\ \varphi_i^h = \varphi(x_i) + O(N^{-2}), \quad \varphi_0^h = \varphi(0), \quad \varphi_N^h = \varphi(1). \end{gathered} \tag{1.7}$$

Заметим, что если сетка равномерная, то на гладких решениях эта схема имеет погрешность аппроксимации $O(h^2 + (\sigma - 0.5)\tau + \tau^2)$.

Основным результатом параграфа является доказываемая в разделе 1.3

Т е о р е м а 1.1. *Пусть* $u(x,t)$ *— решение задачи (1.1),(1.2) с достаточно гладкими коэффициентами, начальным условием и правой частью, а* $u_i^{h,j}$ *— решение задачи (1.5)–(1.7) с начальным условием*

$$L_\varepsilon^h \varphi^h = (L_\varepsilon \varphi)(x_i), \quad i = 1, \ldots, N-1, \quad \varphi_0^h = \varphi(0), \quad \varphi_N^h = \varphi(1), \tag{1.8}$$

на сетке $\Omega \times \omega_\tau$ *(1.1.7),(1.3),(1.4), параметр* C *которой удовлетворяет условию*

$$C > 2p(0)/r(0). \tag{1.9}$$

Тогда

1) при $\sigma > 0.5$

$$\max_j ||u_i^{h,j} - u(x_i, t_j)||_{L_\infty^h(\Omega)} = O(N^{-2} \ln^2 N + \tau); \tag{1.10}$$

2) при $\sigma = 0.5$

$$\max_j ||0.5(u_i^{h,j} + u_i^{h,j+1}) - u(x_i, t_j + \tau/2)||_{L_\infty^h(\Omega)} = O(N^{-2} \ln^2 N + \tau^2) \tag{1.11}$$

равномерно по ε.

1.1. Устойчивость схемы с весами в норме L_2^h

Справедлива

Т е о р е м а 1.2. *Пусть* $0.5 \le \sigma \le 1$ *и* $|r'(x)| \le R = \text{const}$. *Тогда, если шаг по времени* $\tau < \tau_0 \equiv R^{-1}$, *то схема с весами (1.5)–(1.7) при однородных граничных условиях устойчива в норме* L_2^h *по начальным данным и правой части, т. е. если*

$$\begin{gathered}\left[y_t + L_\varepsilon^h y^\sigma\right]_i^j = f_i^j, \quad i = 1, \ldots, N-1, \quad j = 0, \ldots, K-1,\\ y_0^j = y_N^j = 0, \quad j = 0, \ldots, K,\\ y_i^0 = \varphi_i, \quad i = 1, \ldots, N-1,\end{gathered} \tag{1.12}$$

то

$$||y^{j+1}|| \le c\left(||\varphi|| + \sqrt{\sum_{j'=1}^{j} \tau ||f^{j'}||^2}\right),$$

где c *—некоторая постоянная*[1].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножая разностное уравнение (1.12) в смысле скалярного произведения (1.14) на y^σ и учитывая, что для любой сеточной функции v_i, обращающейся в нуль при $i = 0$ и $i = N$,

$$\left(r^h v_{\overset{\circ}{x}}, v\right) = -0.5(r^h_{\bar{x},i} v_i, v_{i-1}], \tag{1.13}$$

получаем

$$\begin{aligned}(y_t, y^\sigma) = -\varepsilon(p^h y^\sigma_{\bar{x}}, y^\sigma_{\bar{x}}] - 0.5(r^h_{\bar{x},i} y^\sigma_i, y^\sigma_{i-1}] - (q^h y^\sigma, y^\sigma) + (f, y^\sigma) \le\\ \le c\left(||\hat{y}||^2 + ||y||^2 + ||f||^2\right),\end{aligned}$$

[1]Здесь и ниже в этом параграфе одной и той же буквой c обозначаются различные постоянные, не зависящие от ε, N и τ.

т. е.

$$\sigma||\hat{y}||^2 \le (1-\sigma)||y||^2 + 2(\sigma - 0.5)(y, \hat{y}) + c\tau \left(||\hat{y}||^2 + ||y||^2 + ||f||^2\right).$$

Воспользовавшись неравенством $2(y, \hat{y}) \le ||y||^2 + ||\hat{y}||^2$, имеем

$$0.5||\hat{y}||^2 \le 0.5||y||^2 + c\tau \left(||\hat{y}||^2 + ||y||^2 + ||f||^2\right),$$

т. е.

$$||\hat{y}||^2 \le (1 + c\tau)||y||^2 + c\tau||f||^2.$$

Замечая, что $(1+c\tau)^j \le \exp(c\tau j) \le \exp(cT)$, получаем утверждение теоремы.

1.2. Априорные оценки

В §1 главы 1 рассматривалась краевая задача для стационарного уравнения с оператором L_ε (1.2) и доказана теорема 1.1.3, которую в обозначениях настоящего параграфа можно переформулировать следующим образом

Т е о р е м а 1.1.3′. *Пусть коэффициенты $p(x)$ и $r(x)$ оператора L_ε (1.2) достаточно гладкие. Тогда, если на сетке Ω (1.1.7)*

$$\left(L_\varepsilon^h v\right)_i = f_i, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad v_0 = v_N = 0,$$

то

$$||v||_{L_\infty^h(\Omega)} \le c||f||_{L_1^h(\Omega)},$$

где c — некоторая постоянная, не зависящая от ε и N.

В настоящем разделе рассматривается схема с весами (1.5)–(1.7) с однородными граничными условиями и правой частью вида $f_1 + f_2^\sigma$:

$$
\begin{gathered}
\left[y_t + L_\varepsilon^h y^\sigma\right]_i^j = [f_1 + f_2^\sigma]_i^j, \quad i = 1, \ldots, N-1, \quad j = 0, \ldots, K-1, \\
y_0^j = y_N^j = 0, \quad j = 0, \ldots, K, \\
y_i^0 = \varphi_i, \quad i = 0, \ldots, N,
\end{gathered}
\tag{1.14}
$$

где $\varphi_0 = \varphi_N = 0$. Имеет место

Т е о р е м а 1.3. *Пусть y — решение (1.14) и выполняются условия теоремы 1.1.3′. Тогда*

1) при $0.5 \le \sigma \le 1$

$$
\begin{aligned}
||y^{\sigma,j}||_{L_\infty^h(\Omega)} \le c \Bigg(& ||f_2^0 - L_\varepsilon^h \varphi|| + ||f_1^0|| + ||f_2^0||_{L_1^h(\Omega)} + ||f_{2,t}^0||_{L_1^h(\Omega)} + \\
& + \max_j \left\{ ||f_{1,t}^j|| + ||f_{2,tt}^j||_{L_1^h(\Omega)} \right\} \Bigg);
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

2) если $\sigma > 0.5$, то

$$
||y_j||_{L_\infty^h(\Omega)} \le ||\varphi||_{L_\infty^h(\Omega)} + \frac{1}{2\sigma - 1} \max_j ||y^{\sigma,j}||_{L_\infty^h(\Omega)}. \tag{1.16}
$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Решение (1.14) представимо в виде

$$
y = v + w,
$$

где v и w — решения следующих разностных задач

$$
\begin{gathered}
L_\varepsilon^h w^j = f_2^j, \quad i = 1, \ldots, N-1, \\
w_0^j = w_N^j = 0, \\
j = 0, \ldots, K;
\end{gathered}
\tag{1.17}
$$

$$
\begin{gathered}
L_\varepsilon^h v^\sigma = f_1 - v_t - w_t, \quad i = 1,\dots,N-1, \quad j = 0,\dots,K-1,\\
v_0^j = v_N^j = 0, \quad j = 0,\dots,K,\\
v_i^0 = \varphi_i - w_i^0, \quad i = 0,\dots,N.
\end{gathered} \tag{1.18}
$$

Отсюда, принимая во внимание теорему 1.1.3$'$ и (1.16), имеем

$$
||y^{\sigma,j}||_{L^h_\infty(\Omega)} \le ||w^{\sigma,j}||_{L^h_\infty(\Omega)} + c\left(||f_1^j|| + ||V^j|| + ||w_t^j||\right), \tag{1.19}
$$

где $V \equiv v_t$ является, как легко видеть, решением разностной задачи

$$
\begin{gathered}
V_t + L_\varepsilon^h V^\sigma = f_{1,t} - w_{tt}, \quad i = 1,\dots,N-1, \quad j = 0,\dots,K-2,\\
V_0^j = V_N^j = 0, \quad j = 0,\dots,K-1,\\
V^0 + \sigma\tau L_\varepsilon^h V^0 = f_1^0 + f_2^0 - L_\varepsilon^h\varphi - w_t^0, \quad i = 1,\dots,N-1.
\end{gathered}
$$

Заметим, что последнее уравнение — уравнение для V^0 — являющееся в этой задаче начальным условием, получено из уравнения (1.18) при $j = 0$. Умножая это уравнение скалярно на V^0, с учетом (1.13) имеем

$$
\begin{aligned}
||V^0||^2 + \sigma\tau\left\{(p^h V^0_{\bar{x}}, V^0_{\bar{x}}] + 0.5(r^h_{\bar{x},i} V^0_{i-1}, V^0_i] + (q^h V^0, V^0)\right\} =&\\
= (f_1^0 + f_2^0 - L_\varepsilon^h\varphi - w_t^0, V^0),&
\end{aligned}
$$

и следовательно

$$
||V^0|| \le c\left(||f_1^0|| + ||f_2^0 - L_\varepsilon^h\varphi|| + ||w_t^0||\right).
$$

Учитывая это, оценим $||V^j||$ по теореме 1.2 и подставим эту оценку в (1.19):

$$||y^{\sigma,j}||_{L^h_\infty(\Omega)} \le c\left(||f_2^0 - L^h_\varepsilon\varphi|| + \right.$$
$$\left. + \max_j\left\{||f_1^j|| + ||f_{1,t}^j|| + ||w^j||_{L^h_\infty(\Omega)} + ||w_t^j|| + ||w_{tt}^j||\right\}\right).$$

Далее, замечая, что w —решение (1.17), можем оценить слагаемые с w по теореме 1.1.3$'$:

$$||w^j||_{L^h_\infty(\Omega)} \le c||f_2^j||_{L^h_1(\Omega)}, \quad ||w_t^j|| \le c||f_{2,t}^j||_{L^h_1(\Omega)}, \quad ||w_{tt}^j|| \le c||f_{2,tt}^j||_{L^h_1(\Omega)}.$$

Принимая также во внимание, что для любой сеточной функции Y и любой нормы $||\cdot||$

$$||Y^j|| \le ||Y^0|| + T\max_j ||Y_t^j||,$$

получаем (1.15).

2) Замечая, что

$$\hat{y} = -\frac{1-\sigma}{\sigma}y + \frac{1}{\sigma}y^\sigma,$$

и что при $\sigma > 0.5$ имеем $\dfrac{1-\sigma}{\sigma} < 1$, и воспользовавшись формулой суммы геометрической прогрессии, получаем (1.16). Теорема доказана.

1.3. Погрешность аппроксимации и сходимость

Доказательство теоремы 1.1.

Пусть $z_i^j \equiv u_i^{h,j} - u(x_i, t_j)$ — погрешность решения. Тогда

$$\begin{gathered} \left[z_t + L_\varepsilon^h z^\sigma\right]_i^j = \Psi_i^j, \quad i = 1, \ldots, N-1, \quad j = 0, \ldots, K-1, \\ z_0^j = z_N^j = 0, \quad j = 0, \ldots, K, \\ z_i^0 = \phi_i \equiv \varphi_i^h - \varphi(x_i), \quad i = 0, \ldots, N. \end{gathered} \tag{1.20}$$

Здесь

$$\Psi_i^j \equiv f_i^{h,j} - (u(x_i, t_j))_t - L_\varepsilon^h (u(x_i, t_j))^\sigma$$

— погрешность аппроксимации схемы (1.5)–(1.7), которая, как легко видеть, представима в виде

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2^\sigma,$$

где

$$\begin{gathered} \Psi_{1,i}^j = (\dot{u}(x_i, t_j))^\sigma - (u(x_i, t_j))_t, \\ \Psi_{2,i}^j = (L_\varepsilon u)(x_i, t_j) - L_\varepsilon^h (u(x_i, t_j)). \end{gathered}$$

Тогда для задачи (1.20) справедлива теорема 1.3 и из (1.15) имеем

$$\begin{aligned} ||z^{\sigma,j}||_{L_\infty^h(\Omega)} \leq c \Big(& ||\Psi_2^0 - L_\varepsilon^h \phi|| + ||\Psi_1^0|| + ||\Psi_2^0||_{L_1^h(\Omega)} + ||\Psi_{2,t}^0||_{L_1^h(\Omega)} + \\ & + \max_j \left\{ ||\Psi_{1,t}^j|| + ||\Psi_{2,tt}^j||_{L_1^h(\Omega)} \right\} \Big). \end{aligned} \tag{1.21}$$

Замечая, что $\Psi_{2,i}^0 = (L_\varepsilon \varphi)(x_i) - L_\varepsilon^h (\varphi(x_i))$, в силу (1.8) имеем

$$L_\varepsilon^h \phi - \Psi_{2,i}^0 = 0, \tag{1.22}$$

и, так как $\varphi(x)$ предполагается достаточно гладкой функцией,

$$||\Psi_2^0||_{L_1^h(\Omega)} = O(N^{-2}). \tag{1.23}$$

Отсюда, воспользовавшись теоремой $1.1.3'$ для (1.22), получаем

$$||\phi||_{L^h_\infty(\Omega)} \equiv ||\varphi^h_i - \varphi(x_i)||_{L^h_\infty(\Omega)} = O(N^{-2}). \tag{1.24}$$

Чтобы оценить остальные слагаемые в правой части (1.21) воспользуемся представлением решения задачи (1.1) в виде [37, с. 221]

$$u(x,t) = U(x,t) + V(x,t),$$

где

$$\left|\frac{\partial^{k+l}}{\partial^k x\, \partial^l t} U\right| \le c, \qquad \left|\frac{\partial^{k+l}}{\partial^k x\, \partial^l t} V\right| \le c\varepsilon^{-k} \exp\left(-\alpha \frac{x}{\varepsilon}\right), \quad k, l = 0, \ldots, 4,$$

α — любая постоянная $\alpha < r(0)/p(0)$, причем

$$\dot V + L_\varepsilon V = 0. \tag{1.25}$$

Заметим, что

$$\Psi^j_{1,i} = \Psi_{1,i}(t_j), \qquad \Psi^j_{2,i} = \Psi_{2,i}(t_j),$$

где $\Psi_{1,i}(t)$ и $\Psi_{1,i}(t)$ — функции непрерывного аргумента t и дискретного аргумента x_i:

$$\Psi_{1,i}(t) \equiv \sigma \dot u(x_i, t+\tau) + (1-\sigma)\dot u(x_i,t) - \frac{u(x_i,t+\tau) - u(x_i,t)}{\tau},$$

$$\Psi_{2,i}(t) \equiv (L_\varepsilon)(x_i,t) - L^h_\varepsilon\left(u(x_i,t)\right).$$

Тогда по теореме Лагранжа

$$\left|(\Psi_{1,t})^j_i\right| = \left|\dot\Psi_{1,i}\big(\tilde t_j(x_i)\big)\right| \le \max_t \left|\dot\Psi_{1,i}(t)\right| = \\ = \max_t \left|\sigma \ddot u(x_i,t+\tau) + (1-\sigma)\ddot u(x_i,t) - \frac{\dot u(x_i,t+\tau) - \dot u(x_i,t)}{\tau}\right|,$$

и, как легко видеть,

$$||\Psi_1^j|| + ||\Psi_{1,t}^j|| = O\left((\sigma - 0.5)\tau + \tau^2\right). \qquad (1.26)$$

Аналогично для Ψ_2 имеем

$$\left|(\Psi_{2,t})_i^j\right| = \left|\dot{\Psi}_{2,i}\big(\tilde{t}_j(x_i)\big)\right| \le \max_t \left|\dot{\Psi}_{2,i}(t)\right| =$$
$$= \max_t \left|\left(L_\varepsilon \dot{u}\right)(x_i,t) - L_\varepsilon^h\left(\dot{u}(x_i,t)\right)\right|,$$

и следовательно

$$\left|(\Psi_{2,t})_i^j\right| \le \psi_i + \bar{\psi}_i,$$

где

$$\psi_i \equiv \max_t \left|\left(L_\varepsilon \dot{U}\right)(x_i,t) - L_\varepsilon^h\left(\dot{U}(x_i,t)\right)\right|,$$
$$\bar{\psi}_i \equiv \max_t \left|\left(L_\varepsilon \dot{V}\right)(x_i,t) - L_\varepsilon^h\left(\dot{V}(x_i,t)\right)\right|, \qquad (1.27)$$

причем в силу (1.25)

$$\bar{\psi}_i = \max_t \left|\ddot{V}(x_i,t) + L_\varepsilon^h\left(\dot{V}(x_i,t)\right)\right|. \qquad (1.28)$$

Легко видеть, что

$$\psi_i = \begin{cases} O\left(N^{-2}\right), & i \ne n, \\ O\left(N^{-1}\right), & i = n, \end{cases}$$

и следовательно

$$||\psi||_{L_1^h(\Omega)} = O\left(N^{-2}\right).$$

Далее наши рассуждения в упрощенном виде повторяют рассуждения, использованные в [2] при доказательстве теоремы 4. Замечая, что из представлений $\bar{\psi}_i$ (1.27) и (1.28) вытекает

$$\bar{\psi} \le c \begin{cases} \dfrac{h_i^2}{\varepsilon^3} \exp\left(-\alpha \dfrac{x_{i-1}}{\varepsilon}\right), & i = 1, \ldots, n-1, n+2, \ldots, N-1, \\ \dfrac{H}{h^2 + \varepsilon^2} \exp\left(-\alpha \dfrac{x_{i-1}}{\varepsilon}\right), & i = n, n+1, \end{cases}$$

в силу условия (1.9) имеем

$$||\bar{\psi}||_{L_1^h(\Omega)} = O\left(N^{-2} \ln^2 N\right),$$

и следовательно

$$||\Psi_{2,t}^j||_{L_1^h(\Omega)} = O\left(N^{-2} \ln^2 N\right) \tag{1.29}$$

равномерно по ε.

Получая аналогичным образом оценку

$$||\Psi_{2,tt}^j||_{L_1^h(\Omega)} = O\left(N^{-2} \ln^2 N\right) \tag{1.30}$$

и подставляя (1.22), (1.23), (1.26), (1.29) и (1.30) в (1.21), имеем

$$||z^{\sigma,j}||_{L_\infty^h(\Omega)} = O\left(N^{-2} \ln^2 N + (\sigma - 0.5)\tau + \tau^2\right).$$

Отсюда при $\sigma > 0.5$ из (1.16) теоремы 1.3 с учетом (1.24) получаем (1.10), а при $\sigma = 0.5$ с учетом

$$0.5\left[u(x_i, t_{j+1}) + u(x_i, t_j)\right] - u(x_i, t_j + \tau/2) = O(\tau^2)$$

получаем (1.11). Теорема доказана.

Таблица 1.1:

$\sigma = 1.0$					
τ^{-1}	N	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 10^{-2}$	$\varepsilon = 10^{-4}$	$\varepsilon = 10^{-6}$
16	8	.01952	.06287	.06191	.06189
	16	.02008	.02101	.02396	.02401
	32	.02019	.01946	.02023	.02025
32	8	.00973	.06520	.06480	.06479
	16	.01014	.02203	.02164	.02163
	32	.01024	.01018	.01088	.01091
64	8	.00473	.06635	.06628	.06628
	16	.00505	.02231	.02218	.02218
	32	.00514	.00759	.00753	.00753
128	8	.00223	.06692	.06704	.06703
	16	.00248	.02238	.02239	.02239
	32	.00257	.00750	.00750	.00750
256	8	.00100	.06721	.06742	.06742
	16	.00119	.02239	.02248	.02248
	32	.00127	.00742	.00745	.00744

1.4. Численные результаты

Приведем численные результаты, иллюстрирующие точность исследованной схемы. Легко видеть, что функция

$$u(x) = \frac{e^{-x/\varepsilon} - e^{-1/\varepsilon}}{1 - e^{-1/\varepsilon}} \sin 2t + 2x \cos \frac{\pi x}{2} \sin t$$

является решением задачи

$$\dot{u} = \varepsilon u'' + u' + f(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le 1,$$

$$u(0,t) = \sin 2t, \quad u(1,t) = 0, \quad 0 \le t \le 1,$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1,$$

Таблица 1.2:

$\sigma = 0.5$					
τ^{-1}	N	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 10^{-2}$	$\varepsilon = 10^{-4}$	$\varepsilon = 10^{-6}$
8	8	.00270	.06781	.06806	.06805
	16	.00146	.02277	.02298	.02298
	32	.00117	.00771	.00783	.00783
	64	.00110	.00275	.00282	.00283
	128	.00108	.00111	.00117	.00117
16	8	.00191	.06757	.06787	.06787
	16	.00068	.02248	.02267	.02266
	32	.00037	.00748	.00755	.00755
	64	.00029	.00253	.00256	.00256
	128	.00027	.00087	.00089	.00089
32	8	.00171	.06751	.06782	.06782
	16	.00048	.02242	.02259	.02260
	32	.00017	.00743	.00749	.00749
	64	.00009	.00247	.00249	.00249
	128	.00007	.00081	.00082	.00082

с правой частью

$$f(x,t) = \frac{e^{-x/\varepsilon} - e^{-1/\varepsilon}}{1 - e^{-1/\varepsilon}} 2\cos 2t + 2x \cos\frac{\pi x}{2}\cos t +$$
$$+ \left(\left(\frac{\varepsilon\pi^2 x}{2} - 2 \right) \cos\frac{\pi x}{2} + \pi(2\varepsilon + x)\sin\frac{\pi x}{2} \right) \sin t.$$

Эта задача решалась по схеме (1.5)–(1.7) на сетке (1.1.7),(1.3),(1.4) при $2n = N$, т.е. при одинаковом числе узлов в "погранслое" и вне его, $A = 0.5$, $C = 2$. В таблицах приведены значения $\max\limits_j ||u_i^{h,j} - u(x_i, t_j)||_{L_\infty^h(\Omega)}$ для различных ε, N, τ при $\sigma = 1$ и $\sigma = 0.5$. Построчный анализ при каждом N и τ свидетельствует о стабилизации погрешности при $\varepsilon \to 0$, т. е. о равномерной по ε сходимости.

Глава 3.

Разностные схемы для сингулярно возмущенных эллиптических уравнений

§1. Неравенство Соболева в случае анизотропных сеток

В этом параграфе для кусочно-линейных непрерывных функций, заданных на триангуляции $\mathcal{T}_h$ области $\Omega \subset R^2$ с кусочно-гладкой границей, установлено, что их нормы в $C(\bar{\Omega})$ ограничены нормами в $W_2^1(\Omega)$, умноженными на $c|\ln h|^{1/2}$, где h — диаметр наименьшего из треугольников $\tau \in \mathcal{T}_h$, а $c = c(\Omega)$ — некоторая постоянная. Квазиравномерность триангуляции $\mathcal{T}_h$ не предполагается. Этот результат используется при исследовании разностной схемы для сингулярно возмущенной эллиптической задачи (§2).

Известно [25], что если $\Omega = (a, b)$, то $W_2^1(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$, и для любой функции $v \in W_2^1(\Omega)$

$$||v||_{C(\bar{\Omega})} \leq c||v||_{W_2^1(\Omega)}, \tag{1.1}$$

где $c = c(\Omega)$ — постоянная, не зависящая от v. Известно также [29], что если на отрезке $[a, b]$ ввести произвольную сетку и для сеточных функций, заданных в узлах этой сетки, определить сеточные аналоги норм C и W_2^1, то для сеточных функций будет справедливо неравенство типа (1.1).

Если $\Omega \subset R^2$, то вложение (1.1) не имеет места. Однако, если в $\bar{\Omega}$ ввести триангуляцию $\mathcal{T}_h$: $\bar{\Omega} = \bigcup\limits_{\tau \in \mathcal{T}_h} \tau$ и предположить, что она квазиравномерна, т. е. диаметры всех треугольников τ не превосходят h, а их площади не меньше ch^2, где $c > 0$ — постоянная, не зависящая от h, то для заданных на этой триангуляции кусочно-линейных непрерывных функций имеет место [26] так называемое слабое вложение, т. е. неравенство (1.1) справедливо с постоянной $c = c(h) = \tilde{c}\,|\ln h|^{1/2}$:

$$||\chi||_{C(\bar{\Omega})} \leq \tilde{c}\,|\ln h|^{1/2} ||\chi||_{W_2^1(\Omega)}.$$

Цель настоящего параграфа — установить слабое вложение для триангуляций, не являющихся, вообще говоря, квазиравномерными, элементы которых могут быть сколь угодно "сплющенными".

Пусть $\Omega \subset R^2$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей, углы которой отличны от 0 и 2π, $\mathcal{T}_h$ — ее триангуляция, т. е. $\bar{\Omega} = \bigcup\limits_{\tau \in \mathcal{T}_h} \tau$, и

$$h = \min_{\tau \in \mathcal{T}_h} \operatorname{diam} \tau. \tag{1.2}$$

Основной результат параграфа —

Т е о р е м а 1.1. *Пусть χ — кусочно-линейная непрерывная функция, заданная на триангуляции $\mathcal{T}_h$. Тогда, если параметр h триангуляции $\mathcal{T}_h$, определяемый соотношением (1.2), удовлетворяет условию $h \leq h_0$, где h_0 — некоторая постоянная, то*

$$||\chi||_{C(\bar{\Omega})} \leq c\,|\ln h|^{1/2}||\chi||_{W_2^1(\Omega)},$$

где $c = c(\Omega)$ — постоянная, не зависящая от χ и h.

Так как для функций из $W_2^1(\Omega)$, равных нулю на части границы области Ω ненулевой длины, полунорма $|v|_{W_2^1(\Omega)} \equiv ||\nabla v||_{L_2(\Omega)}$ эквивалентна норме $||v||_{W_2^1(\Omega)}$ [23], то из теоремы вытекает

С л е д с т в и е 1.1. *Пусть выполняются условия теоремы 1.1. Тогда если $\chi = 0$ на $S \subset \partial\Omega$ — части границы ненулевой длины, то*

$$||\chi||_{C(\bar{\Omega})} \leq c\,|\ln h|^{1/2}||\nabla\chi||_{L_2(\Omega)},$$

где $c = c(\Omega, S)$ — постоянная, не зависящая от χ.

З а м е ч а н и е 1.1. Если для сеточных функций, заданных в вершинах треугольников τ_i, определить сеточные аналоги норм W_2^1 и C [29, 26, 39], то для сеточных функций, очевидно, имеет место теорема, аналогичная теореме 1.1.

Теорема 1.1 есть следствие более общей теоремы 1.2.

Т е о р е м а 1.2. *Пусть $\Omega \subset R^2$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей, углы которой отличны от 0 и 2π, а* *функция* $\chi \in W_2^1(\Omega)$ *такова, что ее сужение на треугольник* $\tau \subset \bar{\Omega}$ *есть линейная функция. Тогда*

$$||\chi||_{C(\tau)} \leq c_1 \left(\ln \frac{c_2}{\operatorname{diam} \tau}\right)^{1/2} ||\chi||_{W_2^1(\Omega)},$$

где $c_1 = c_1(\Omega)$, $c_2 = c_2(\Omega) > \operatorname{diam} \Omega$ *— постоянные, не зависящие от* χ *и* h.

Действительно, при выполнении условий теоремы 1.1 в силу теоремы 1.2 имеем

$$||\chi||_{C(\bar{\Omega})} \leq c_1 \max_{\tau \in \mathcal{T}} \left(\ln \frac{c_2}{\operatorname{diam} \tau}\right)^{1/2} ||\chi||_{W_2^1(\Omega)} = c_1 \left(\ln \frac{c_2}{h}\right)^{1/2} ||\chi||_{W_2^1(\Omega)}.$$

Отсюда при $h \leq h_0 = c_2^{-1}$ получаем утверждение теоремы 1.1 с постоянной $c = \sqrt{2} c_1$

Для доказательства теоремы 1.2 будет полезна

Л е м м а 1.1. *Если* χ *— линейная функция, заданная на треугольнике* τ, *то*

$$||\chi||_{C(\tau)} \leq c_3 (\operatorname{mes} \tau)^{-1/2} ||\chi||_{L_2(\tau)},$$

где $c_3 = 1/3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначая через a, b, c значения функции χ в вершинах треугольника τ, и учитывая, что так как функция χ линейна, то $||\chi||_{C(\tau)} = \max\{|a|, |b|, |c|\}$, из соотношений

$$\begin{aligned}||\chi||^2_{L_2(\tau)} &= \frac{\mathrm{mes}\,\tau}{6}(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc) = \\ &= \frac{\mathrm{mes}\,\tau}{6}\left[(a+b/2+c/2)^2+\frac{3}{4}(b+c/3)^2+\frac{2}{3}c^2\right] \geq \\ &\geq \frac{\mathrm{mes}\,\tau}{9}\max\{a^2,b^2,c^2\}\end{aligned}$$

получаем утверждение леммы.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1.2. Пусть $B \supset \bar{\Omega}$ — открытый круг радиуса R. Известно [25, 26], что $\chi \in W_2^1(\Omega)$ можно продолжить на B с сохранением нормы, т. е.

$$||\chi||_{W_2^1(B)} \leq c_4||\chi||_{W_2^1(\Omega)}, \tag{1.3}$$

где $c_4 = c_4(\Omega, B)$ — постоянная, не зависящая от χ, так, что $\chi|_{\partial B} = 0$.

Так как функция χ линейна на τ, то в силу леммы 1.1

$$||\chi||_{C(\tau)} \leq c_3(\mathrm{mes}\,\tau)^{-1/2}||\chi||_{L_2(\tau)}. \tag{1.4}$$

Легко видеть, что

$$||\chi||_{L_2(\tau)} = (\chi, \phi), \tag{1.5}$$

где

$$\phi(M) = \begin{cases} \chi/||\chi||_{L_2(\tau)}, & M \in \tau, \\ 0, & M \notin \tau, \end{cases} \tag{1.6}$$

— функция из $L_2(B)$, причем

$$||\phi||_{L_2(B)} = 1. \tag{1.7}$$

Введем в рассмотрение функцию $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(B)$, которая есть обобщенное решение задачи

$$\begin{gathered} -\triangle v = \phi, \quad M \in B, \\ v = 0, \quad M \in \partial B, \end{gathered} \tag{1.8}$$

т. е.

$$v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(B): \qquad (\nabla v, \nabla \varphi) = (\phi, \varphi) \qquad \forall\, \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(B). \tag{1.9}$$

Тогда с учетом (1.5)

$$||\chi||_{L_2(\tau)} = (\nabla v, \nabla \chi),$$

и из (1.4) с учетом (1.3) имеем

$$||\chi||_{C(\tau)} \leq c_3 c_4 (\operatorname{mes} \tau)^{-1/2} ||\nabla v||_{L_2(B)} ||\chi||_{W_2^1(\Omega)}.$$

Замечая, что в силу (1.9) и (1.6),(1.7)

$$||\nabla v||_{L_2(B)} = \sqrt{(v, \phi)} \leq \sqrt{||v||_{L_2(\tau)}},$$

и [34, с. 326]

$$v(M) = (G(M,P), \phi(P)) = \left(\sqrt{G(M,P)}, \sqrt{G(M,P)}\phi(P)\right),$$

где $G(M,P)$ — функция Грина задачи (1.8)

$$\begin{gathered} G(M,P) = G(r,\psi;\rho,\theta) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{R^2 - 2r\rho\cos(\psi-\theta) + \dfrac{r^2\rho^2}{R^2}}{r^2 - 2r\rho\cos(\psi-\theta) + \rho^2} \leq \\ \leq \frac{1}{2\pi} \ln \frac{2R}{r_{MP}}, \end{gathered}$$

с учетом неравенства Коши-Буняковского имеем

$$
\begin{aligned}
||v||^2_{L_2(\tau)} &= \int_\tau v^2(M)\,dM \le \\
&\le \int_\tau \left(\int_\tau G(M,Q)\,dQ\right)\left(\int_\tau G(M,P)\phi^2(P)\,dP\right)\,dM \le \\
&\le \int_\tau dP\,\phi^2(P)\int_\tau dM\,G(M,P)\int_\tau dQ\,G(M,Q).
\end{aligned}
$$

Обозначая через l максимальную из длин сторон треугольника τ и через d — высоту, проведенную в τ к стороне длины l, и учитывая, что $(\sqrt{3}/2)\operatorname{diam}\tau \le l \le \operatorname{diam}\tau$, имеем

$$
\begin{aligned}
||v||_{L_2(\tau)} &\le \max_{M\in B}\int_\tau G(M,P)\,dP \le \frac{1}{2\pi}\int_{-d/2}^{d/2} dx\int_{-l/2}^{l/2} dy\,\ln\frac{2R}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \\
&\le \frac{d}{\pi}\int_0^{l/2}\ln\frac{2R}{y}dy = \frac{ld}{2\pi}(\ln\frac{4R}{l}+1) \le \frac{\operatorname{mes}\tau}{\pi}\ln\frac{8Re}{\sqrt{3}\operatorname{diam}\tau}.
\end{aligned}
$$

Отсюда получаем утверждение теоремы с постоянными $c_1 = c_3c_4/\sqrt{\pi}$ и $c_2 = 8Re/\sqrt{3} > \operatorname{diam}\Omega$.

З а м е ч а н и е 1.2. Если сужение функции $\chi \in W_2^1$ на треугольник $\tau \subset \bar{\Omega}$ есть полином степени, не превосходящей r, то утверждения леммы 1.1 и теоремы 1.2 сохраняют силу с постоянными $c_3 = c_3(r)$, $c = c(\Omega, r)$, при этом для доказательства леммы можно воспользоваться $<$обратными$>$ неравенствами [33, с. 142].

§2. Равномерная по малому параметру сходимость разностной схемы с центральной разностной производной для одной задачи в полосе

В этом параграфе для сингулярно возмущенного эллиптического уравнения второго порядка в полосе $[0,1]\times(-\infty,\infty)$ с условиями периодичности по переменной y исследуется разностная схема с аппроксимацией первой производной центральным разностным отношением. Показано, что на сгущающейся в пограничном слое кусочно-равномерной сетке исследуемая схема сходится равномерно по малому параметру в смысле сеточной нормы L_∞^h со скоростью $O\left((N^{-2}\ln^2 N + \bar{N}^{-2})\sqrt{\ln \bar{N}}\right)$, где N и $\bar{N}$ — число узлов по направлениям x и y соответственно.

Рассмотрим периодическую краевую задачу для сингулярно возмущенного эллиптического уравнения в полосе $[0,1]\times(-\infty,\infty)$

$$
\begin{gathered}
L_\varepsilon u \equiv -\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial u}{\partial x}+q(x,y)u=f(x,y),\\
x\in(0,1),\quad y\in(-\infty,\infty),\\
u(0,y)=\mu_1(y),\quad u(1,y)=\mu_2(y),\quad y\in(-\infty,\infty),\\
u(x,y+1)=u(x,y),\quad x\in[0,1],\quad y\in(-\infty,\infty),
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

где коэффициент $q(x,y)\geq 0$, правая часть $f(x,y)$ и граничные функции $\mu_1(y)$, $\mu_2(y)$ есть функции, периодические по переменной

y с периодом 1, а $\varepsilon \in (0, 1]$ — малый параметр.

Известно [11], что при $\varepsilon \to 0$ решение задачи (2.1) сходится при $0 < x \leq 1$ к решению вырожденной задачи

$$-\frac{\partial v}{\partial x} + q(x, y)v = f(x, y),$$
$$v(1, y) = \mu_2(y),$$

и при малых ε неиспользованное граничное условие приводит к образованию в окрестности $x = 0$ так называемого эллиптического пограничного слоя, где решение $u(x, y)$ быстро меняется по переменной x, а его производные по этой переменной не являются ограниченными равномерно по ε. Так, при $q(x, y) \equiv f(x, y) \equiv 0$, $\mu_1(y) \equiv 1$, $\mu_2(y) \equiv 0$ задача (2.1) обращается в краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения, решение которой

$$u(x, y) = \frac{\exp(-x/\varepsilon) - \exp(-1/\varepsilon)}{1 - \exp(-1/\varepsilon)}.$$

Для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором $\tilde{L}_\varepsilon$, задаваемым соотношением

$$\tilde{L}_\varepsilon v \equiv -\varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} + qv, \tag{2.2}$$

на сгущающейся в пограничном слое кусочно-равномерной сетке Ω (1.1.7) установлена равномерная по ε сходимость в смысле сеточной нормы L^h_∞ ряда классических разностных схем [37, 2, 18], в том числе равномерная сходимость известной трехточечной схемы с аппроксимацией первой производной центральным разностным отношением (§1 главы 1). Для задачи в полосе (2.1) в [37] на сетке

Ω (1.1.7) исследована разностная схема с аппроксимацией первой производной односторонней разностью и показана ее равномерная по ε сходимость со скоростью $O(N^{-1}\ln^2 N)$.

Настоящий параграф посвящен схеме с центральной разностной производной для задачи в полосе (2.1).

Введем равномерную сетку по переменной y

$$\omega = \{\, y_j \mid y_j = j\bar{h}, \quad j =, 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad \bar{h} = 1/\bar{N}\,\} \tag{2.3}$$

и сетку в полосе $[0, 1] \times (-\infty, \infty)$

$$\Omega \times \omega = \{\, (x_i, y_j), \quad i = 0, \ldots, N, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \}, \tag{2.4}$$

и обозначим, как обычно,

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad \hbar_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{2},$$
$$v_{\bar{x},i} = \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i}, \quad v_{\hat{x},i} = \frac{v_{i+1} - v_i}{\hbar_i}, \quad v_{\overset{\circ}{x},i} = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2\hbar_i};$$
$$v_{\bar{y},j} = \frac{v_j - v_{j-1}}{\bar{h}}, \quad v_{y,j} = \frac{v_{j+1} - v_j}{\bar{h}}.$$

Для сеточных функций, определенных на Ω, введем нормы

$$||v||_{L^h_\infty(\Omega)} = \max_i |v_i|,$$

$$||v||_{L^h_1(\Omega)} = \sum_{i=1}^{N-1} |v_i|\hbar_i.$$

Для сеточных функций, определенных на $\Omega\times\omega$, введем скалярные произведения

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{\bar{N}} u_{ij} v_{ij} \hbar_i \bar{h}, \tag{2.5}$$

$$(u, v] = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{\bar{N}} u_{ij} v_{ij} h_i \bar{h},$$

и нормы

$$||v|| = \sqrt{(v, v)}, \quad ||v]| = \sqrt{(v, v]}, \quad ||v||_{L^h_\infty(\Omega\times\omega)} = \max_{i,j} |v_{ij}|.$$

На сетке $\Omega \times \omega$ рассмотрим разностную схему с центральной разностью

$$\begin{gathered}
\left(L^h_\varepsilon u^h\right)_{ij} \equiv \left[-\varepsilon\left(u^h_{\bar{x}\hat{x}} + u^h_{\bar{y}y}\right) - u^h_{\overset{\circ}{x}} + q^h u^h\right]_{ij} = f^h_{ij}, \\
i = 1, \ldots, N-1, \quad j = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \\
u^h_{0j} = \mu_1(y_j), \quad u^h_{Nj} = \mu_2(y_j), \quad j = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \\
u^h_{i,j+\bar{N}} = u^h_{ij}, \quad i = 0, \ldots, N, \quad j = 0, \pm1, \pm2 \ldots,
\end{gathered} \tag{2.6}$$

где

$$q^h_{ij} = q(x_i, y_j), \quad f^h_{ij} = f(x_i, y_j). \tag{2.7}$$

Заметим, что если сетка равномерная, то на гладких решениях эта схема имеет погрешность аппроксимации $O(h^2 + \varepsilon\bar{h}^2)$.

Основным результатом параграфа является доказываемая в разделе 2.2

Т е о р е м а 2.1. *Пусть $u(x, y)$ — решение задачи (2.1) с достаточно гладкими коэффициентом $q(x, y)$, правой частью и граничными условиями, а u^h_{ij} — решение задачи (2.6),(2.7) на сетке $\Omega \times \omega$ (1.1.7),(2.3),(2.4), параметр C которой удовлетворяет условию*

$$C > 2. \tag{2.8}$$

Тогда

$$||u_{ij}^h - u(x_i, y_j)||_{L_\infty^h(\Omega\times\omega)} = O\left((N^{-2}\ln^2 N + \bar{N}^{-2})\sqrt{\ln \bar{N}}\right)$$

равномерно по ε.

2.1. Априорные оценки

В §1 главы 1 рассматривалась схема с центральной разностью для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором $\tilde{L}_\varepsilon$ (2.2) и доказана теорема 1.1.3, которую в обозначениях настоящего параграфа можно переформулировать следующим образом

Т е о р е м а 1.1.3$'$. *Пусть на сетке Ω (1.1.7)*

$$\begin{gathered}\left(\tilde{L}_\varepsilon^h v\right)_i \equiv \left(-\varepsilon v_{\bar{x}\hat{x}} - v_{\overset{\circ}{x}} + q^h v\right)_i = f_i, \quad i = 1, \ldots, N-1, \\ v_0 = v_N = 0.\end{gathered} \tag{2.9}$$

Тогда

$$||v||_{L_\infty^h(\Omega)} \le c||f||_{L_1^h(\Omega)},$$

где c — некоторая постоянная[2].

В настоящем разделе рассматривается схема (2.6),(2.7) с нулевыми граничными условиями и устанавливается

Т е о р е м а 2.2. *Пусть U_{ij} — решение задачи*

$$\begin{gathered}\left(L_\varepsilon^h U\right)_{ij} = f_{ij}, \quad i = 1, \ldots, N-1, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \\ U_{0j} = U_{Nj} = 0, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \\ U_{i,j+\bar{N}} = U_{ij}, \quad i = 0, \ldots, N, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,\end{gathered} \tag{2.10}$$

[2]Здесь и ниже в этом параграфе одной и той же буквой c обозначаются различные постоянные, не зависящие от ε, N и $\bar{N}$.

где $f_{i,j+\bar N} = f_{ij}$. *Тогда если коэффициент* $q(x,y)$ *оператора* L_ε *(2.1) достаточно гладкий, то*

$$||U||_{L^h_\infty(\Omega\times\omega)} \le c\sqrt{\ln \bar N}\max_j \left\{||f_j||_{L^h_1(\Omega)} + ||f_{\bar y,j}||_{L^h_1(\Omega)}\right\}, \tag{2.11}$$

где c — *некоторая постоянная.*

Для доказательства этой теоремы будет полезна доказываемая в §1 теорема 1.1, которая в обозначениях настоящего параграфа может быть переформулирована следующим образом

Т е о р е м а 1.1$'$. *Для любой функции* w_{ij}, *заданной на сетке* $\Omega\times\omega$ *и обращающейся в нуль при* $i = 0$ *и* $i = N$,

$$||w||_{L^h_\infty(\Omega\times\omega)} \le c\sqrt{\ln \bar N}\left(||w_{\bar x}]| + ||w_{\bar y}||\right),$$

где c — *некоторая постоянная, не зависящая от* ε, N, $\bar N$ *и* w.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2.2. Решение (2.10) представимо в виде

$$U = v + w,$$

где v и w — решения следующих разностных задач

$$\begin{gathered}\left(\tilde L^h_\varepsilon v\right)_{ij} = \left(-\varepsilon v_{\bar x\hat x} - v_{\overset{\circ}{x}} + q^h v\right)_{ij} = f_{ij}, \quad i = 1,\dots,N-1,\\ v_{0j} = v_{Nj} = 0;\end{gathered} \tag{2.12}$$

$$\begin{gathered}\left(L^h_\varepsilon w\right)_{ij} = \left[-\varepsilon(w_{\bar x\hat x} + w_{\bar y y}) - w_{\overset{\circ}{x}} + q^h w\right]_{ij} = \varepsilon v_{\bar y y,ij},\\ i = 1,\dots,N-1, \quad j = 0,\pm1,\pm2,\dots,\\ w_{0j} = w_{Nj} = 0, \quad j = 0,\pm1,\pm2,\dots,\\ w_{i,j+\bar N} = w_{ij}, \quad i = 0,\dots,N, \quad j = 0,\pm1,\pm2,\dots .\end{gathered} \tag{2.13}$$

Умножая разностное уравнение (2.13) в смысле скалярного произведения (2.5) на w и учитывая, что $(w, w_{\overset{\circ}{x}}) = 0$, получаем

$$||w_{\bar{x}}]|^2 + ||w_{\bar{y}}||^2 + \frac{1}{\varepsilon}(q^h w, w) = -(v_{\bar{y}}, w_{\bar{y}}),$$

и следовательно

$$||w_{\bar{x}}]| + ||w_{\bar{y}}|| \leq c||v_{\bar{y}}||.$$

Отсюда в силу теоремы $1.1'$

$$||U||_{L^h_\infty(\Omega\times\omega)} \leq ||v||_{L^h_\infty(\Omega\times\omega)} + c\sqrt{\ln \bar{N}}||v_{\bar{y}}||_{L^h_\infty(\Omega\times\omega)}.$$

Замечая, что v — решение задачи (2.12) и $v_{\bar{y}}$ — решение задачи

$$\left(\tilde{L}^h_\varepsilon\left(v_{\bar{y}}\right)\right)_{ij} = f_{\bar{y},ij} - q^h_{\bar{y},ij} v_{i-1,j}, \quad i = 1, \ldots, N-1,$$
$$v_{\bar{y},0j} = v_{\bar{y},Nj} = 0$$

— оцениваются по теореме $1.1.3'$ как

$$||v||_{L^h_\infty(\Omega\times\omega)} \leq c \max_j ||f_j||_{L^h_1(\Omega)},$$
$$||v_{\bar{y}}||_{L^h_\infty(\Omega\times\omega)} \leq c\left(||v||_{L^h_\infty(\Omega\times\omega)} + \max_j ||f_{\bar{y},j}||_{L^h_1(\Omega)}\right),$$

получаем утверждение теоремы.

2.2. Аппроксимация и сходимость

Доказательство теоремы 2.1.

Пусть $z_{ij} \equiv u^h_{ij} - u(x_i, y_j)$ — погрешность решения. Тогда

$$\begin{gathered}\left(L^h_\varepsilon z\right)_{ij} = \Psi_{ij}, \quad i = 1, \ldots, N-1, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \\ z_{0j} = z_{Nj} = 0, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \\ z_{i,j+\bar{N}} = z_{ij}, \quad i = 0, \ldots, N, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,\end{gathered} \tag{2.14}$$

где

$$\Psi_{ij} \equiv f_{ij}^h - L_\varepsilon^h \left(u(x_i, y_j)\right)$$

— погрешность аппроксимации схемы (2.6),(2.7), причем $\Psi_{i,j+\bar{N}} = \Psi_{ij}$, и для задачи (2.14) справедлива априорная оценка (2.11):

$$||z||_{L_\infty^h(\Omega\times\omega)} \le c\sqrt{\ln \bar{N}} \max_j \left\{ ||\Psi_j||_{L_1^h(\Omega)} + ||\Psi_{\bar{y},j}||_{L_1^h(\Omega)} \right\}. \qquad (2.15)$$

Чтобы оценить правую часть, воспользуемся представлением решения задачи (2.1) в виде [37, с. 196]

$$u(x, y) = U(x, y) + V(x, y),$$

где

$$\left| \frac{\partial^{k+l}}{\partial^k x\, \partial^l y} U \right| \le c, \qquad \left| \frac{\partial^{k+l}}{\partial^k x\, \partial^l y} V \right| \le c\varepsilon^{-k} \exp\left(-\alpha \frac{x}{\varepsilon}\right),$$
$$k = 0, \dots, 4, \quad l = 0, \dots, 5,$$

$\alpha < 1$ — произвольная постоянная, причем

$$L_\varepsilon V = 0. \qquad (2.16)$$

Заметим, что $\Psi_{ij} = \Psi_i(y_j)$, где $\Psi_i(y)$ — функции дискретного аргумента x_i и непрерывного аргумента y:

$$\Psi_i(y) \equiv -\left[\tilde{L}_\varepsilon^h \left(u(x_i, y)\right) - \tilde{L}_\varepsilon u(x_i, y) \right] + \\ + \varepsilon \left[\frac{u(x_i, y+\bar{h}) - 2u(x_i, y) + u(x_i, y-\bar{h})}{\bar{h}^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y) \right].$$

Тогда по теореме Лагранжа

$$\Psi_{\bar{y},ij} = \frac{\partial}{\partial y} \Psi_i \left(\tilde{y}_j(x_i)\right),$$

и

$$|\Psi_{ij}| + |\Psi_{\bar{y},ij}| \leq \max_y \left\{ |\Psi_i(y)| + \left| \frac{\partial}{\partial y} \Psi_i(y) \right| \right\} \leq \psi_i + \bar{\psi}_i + O(\varepsilon \bar{N}^{-2}),$$

где

$$\begin{gathered}
\psi_i \equiv \max_y \left\{ \left| \tilde{L}_\varepsilon^h \left(U(x_i, y) \right) - \tilde{L}_\varepsilon U(x_i, y) \right| + \right. \\
\left. + \left| \tilde{L}_\varepsilon^h \left(\frac{\partial U}{\partial y}(x_i, y) \right) - \left(\tilde{L}_\varepsilon \frac{\partial U}{\partial y} \right)(x_i, y) \right| \right\}, \\
\bar{\psi}_i \equiv \max_y \left\{ \left| \tilde{L}_\varepsilon^h \left(V(x_i, y) \right) - \tilde{L}_\varepsilon V(x_i, y) \right| + \right. \\
\left. + \left| \tilde{L}_\varepsilon^h \left(\frac{\partial V}{\partial y}(x_i, y) \right) - \left(\tilde{L}_\varepsilon \frac{\partial V}{\partial y} \right)(x_i, y) \right| \right\},
\end{gathered} \tag{2.17}$$

причем в силу (2.16)

$$\begin{gathered}
\bar{\psi}_i = \max_y \left\{ \left| \tilde{L}_\varepsilon^h \left(V(x_i, y) \right) - \varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(x_i, y) \right| + \right. \\
\left. + \left| \tilde{L}_\varepsilon^h \left(\frac{\partial V}{\partial y}(x_i, y) \right) - \varepsilon \frac{\partial^3 V}{\partial y^3}(x_i, y) + \left(\frac{\partial q}{\partial y} V \right)(x_i, y) \right| \right\}.
\end{gathered} \tag{2.18}$$

Легко видеть, что

$$\psi_i = \begin{cases} O\left(N^{-2}\right), & i \neq n, \\ O\left(N^{-1}\right), & i = n, \end{cases}$$

и следовательно

$$||\psi||_{L_1^h(\Omega)} = O\left(N^{-2}\right).$$

Далее наши рассуждения в упрощенном виде повторяют рассуждения, использованные в [2] при доказательстве теоремы 4. Замечая, что из представлений $\bar{\psi}_i$ (2.17) и (2.18) вытекает

$$\bar{\psi} \leq c \begin{cases} \dfrac{h_i^2}{\varepsilon^3} \exp\left(-\alpha \dfrac{x_{i-1}}{\varepsilon}\right), & i = 1, \ldots, n-1, n+2, \ldots, N-1, \\ \dfrac{H}{h^2 + \varepsilon^2} \exp\left(-\alpha \dfrac{x_{i-1}}{\varepsilon}\right), & i = n, n+1, \end{cases}$$

в силу условия (2.8) имеем

$$||\bar{\psi}||_{L_1^h(\Omega)} = O\left(N^{-2}\ln^2 N\right),$$

и следовательно

$$\max_j \left\{||\Psi_j||_{L_1^h(\Omega)} + ||\Psi_{\bar{y},j}||_{L_1^h(\Omega)}\right\} = O\left(N^{-2}\ln^2 N\right)$$

равномерно по ε.

Подставляя эту оценку в (2.15), получаем утверждение теоремы.

Список литературы

1. *Андреев В.Б., Коптева Н.В.* Об исследовании разностных схем с аппроксимацией первой производной центральным разностным отношением// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. N 8. С. 101–117.

2. *Андреев В.Б., Савин И.А.* О равномерной по малому параметру сходимости монотонной схемы Самарского и ее модификации// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1995. Т. 35. N 5. С. 739–752.

3. *Багаев Б.М., Шайдуров В.В.* Вариационно-разностное решение уравнения с малым параметром// Методы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск, 1977. С. 89–99.

4. *Багаев Б.М*. Метод Галеркина для обыкновенного дифференциального уравнения с малым параметром// Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1979. Т. 10. N 5. С. 5–16.

5. *Бахвалов Н. С*. К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1969. Т. 9. N 4. С. 841–859.

6. *Блатов И.А.* О проекционном методе для сингулярно возмущенных краевых задач// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 30. N 7. С. 1031–1044.

7. *Боглаев Ю.П., Стániловский А.А.* Обзор библиографии по численным методам решения сингулярно возмущенных задач. Препринт. Черноголовка. 1984.

8. *Бомба А.Я.* Об асимптотическом методе приближенного решения одной задачи массопереноса при фильтрации в пористой среде// Укр. матем. ж. 1982. Т. 34. N 4. С. 493–496.

9. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968.

10. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимтотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.

11. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. шк., 1990.

12. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром// Успехи матем. наук. 1957. Т. 12. Вып. 5(77). С. 3–122.

13. *Громов Б.Ф., Петрищев В.С.*// Труды Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости. Новосибирск, 1969. С. 74–87.

14. *Дегтярев Л.М., Дроздов В.В., Иванова Т.С.* Метод адаптивных к решению сеток в сингулярно-возмущенных одномерных

краевых задачах // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. N 7. С. 1160–1169.

15. *Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У*. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. М.: Мир, 1983.

16. *Ильин А.М*. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной// Матем. заметки. 1969. Т. 6. Вып. 2. С. 237–248.

17. *Коллатц Л*. Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Мир, 1969.

18. *Коптева Н.В.* О равномерной по малому параметру сходимости одной четырехточечной схемы для одномерного стационарного уравнения конвекции–диффузии// Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. N 7. С. 951–957.

19. *Коптева Н.В.* Неравенство Соболева в случае анизотропных сеток// М. 1996. Рукопись деп. в ВИНИТИ. 02.07.96. N 2159-В96. 7 с.

20. *Коптева Н.В.* О равномерной по малому параметру сходимости схемы с весами для одномерного нестационарного уравнения конвекции-диффузии// М. 1996. Рукопись деп. в ВИНИТИ. 02.07.96. N 2160-В96. 15 с.

21. *Коптева Н.В.* О равномерной по малому параметру сходимости одной разностной схемы для эллиптической задачи в поло-

се// М. 1996. Рукопись деп. в ВИНИТИ. 02.07.96. N 2161-В96. 10 с.

22. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

23. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.

24. *Лисейкин В.Д., Яненко Н.Н.* О равномерно сходящемся алгоритме численного решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной// Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск. 1981. Т. 12. N 2. С. 45–56.

25. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.

26. *Оганесян Л.А., Руховец Л.А.* Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: Изд-во АН Арм ССР, 1979.

27. *Оганесян Л.А.* Вариационно-разностный метод для двумерных эллиптических уравнений с малым параметром// Методы аппроксимации и интерполяции. Новосибирск, 1981. С. 108–123.

28. *Савин И.А.* О скорости равномерной по малому параметру сходимости на кусочно-равномерной сетке разностной схемы для параболического уравнения М. 1995. Рукопись деп. в ВИНИТИ. 27.10.95. N 2879-B95. 15 с.

29. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.

30. *Самарский А.А., Андреев В.Б.* Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976.

31. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.

32. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.

33. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980.

34. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.

35. *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Галеркина М.: Мир, 1988.

36. *Шаракшане А.А.* О некоторых разностных схемах второго порядка для уравнений с малым параметром при старшей производной. М., 1983. (Препринт / ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР: N 150)

37. *Шишкин Г.И.* Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: РАН, УрО, 1992.

38. *Шишкин Г.И.* Аппроксимация решений сингулярно возмущенных краевых задач с параболическим пограничным слоем// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29. N 7. С. 963–977.

39. *Heinrich B.* Finite Difference Methods on Irregular Networks. Berlin: Akad.-Verl., 1987.

40. *Kellog R.B., Tsan A.* Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problem without turning points// Math. of Comput. 1978. V. 32. N. 144. P. 1025–1039.

41. *Stynes M., O'Riordan E.* A finite element method for a singularly perturbed boundary value problem// Numerische Mathematik 1986. V. 50. N 1. P. 1–5.

42. *Stynes M., O'Riordan E.* A uniformly accurate finite element method for a singular perturbation problem in conservative form// SIAM J. Num. Anal. 1986. V. 23. N 2. P. 369–375.

43. *Stynes M., O'Riordan E.* A super convergence result for a singularly perturbed boundary value problem// BAIL III: Proc. 3-rd intern. conf. on Boundary and Interior Layers / Ed. J.J.H. Miller. Boole, Dublin, 1984. P. 309–313.

Рисунки

Рисунок 1:

Схема с центральной разностью

Рисунок 2:

Четырехточечная схема

Рисунок 3:

Четырехточечная схема с переменным параметром